Problemas para la $.22^{\text{a}}$
Olimpiada Mexicana de Matemáticas

(Problemas Introductorios)

Editado por:

Carlos Jacob Rubio Barrios

2008

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Yucatán.

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 22^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores del certamen formarán las selecciones que participarán en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2009: la XXI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico que se llevará a cabo en el mes de marzo en México y los exámenes se corregirán en Corea, la 50^{a} Olimpiada Internacional que se llevará a cabo en Alemania durante el mes de julio, la XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en septiembre en México y la XI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que se celebrará en junio en la República Dominicana.

En la 22^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^{o} de agosto de 1989. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2008-2009 y, para el 1^{o} de julio de 2009, no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

La intención de esta publicación es que sirva como guía para los alumnos que desean prepararse para el Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los problemas que aparecen aquí no son ejercicios rutinarios en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela, son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que requiere de una mayor madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Etapas de la Olimpiada

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en la ciudad de Hermosillo, Sonora, del 9 al 14 de noviembre de 2008. En él, se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2008. También, se les aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es **individual**.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas y Saltillo.

Resultados de México en las Internacionales

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en las Olimpiadas Internacionales, Iberoamericanas y Centroamericanas han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwán	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24
2007	Vietnam	92	37

La 48^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo en Hanoi, Vietnam, del 19 al 31 de julio de 2007. La delegación que representó a México estuvo

integrada por los alumnos: Isaac Buenrostro Morales (Jalisco), Aldo Pacchiano Camacho (Morelos), Fernando Campos García (Distrito Federal), Cristian Manuel Oliva Avilés (Yucatán), Manuel Novelo Puc (Yucatán) y Marco Antonio Ávila Ponce de León (Yucatán).
México ocupó el lugar número 37 de 92 países participantes. Los alumnos Isaac, Aldo, Fernando y Cristian obtuvieron medalla de bronce, y Manuel y Marco Antonio obtuvieron mención honorífica.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1
2007	Portugal	22	4

La XXII Olimpiada Iberoamericana se llevó a cabo en Coimbra, Portugal, del 9 al 16 de septiembre de 2007. Los alumnos que concursaron fueron: Aldo Pacchiano Camacho (Morelos), Fernando Campos García (Distrito Federal), Paúl Iván Gallegos Bernal (Jalisco) y Manuel Novelo Puc (Yucatán). Los cuatro alumnos obtuvieron medalla de plata. México ocupó el cuarto lugar de 22 países participantes.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1
2006	Panamá	12	1
2007	Venezuela	12	1

Del 4 al 9 de junio de 2007, se celebró en Mérida, Venezuela la IX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Luis Ángel Isaías Castellano (Colima), Alejandro Jiménez Martínez (Guanajuato) y Manuel Guillermo López Buenfil (Chihuahua). Los alumnos Luis Ángel y Alejandro obtuvieron medalla de oro y Manuel Guillermo obtuvo medalla de plata. México ocupó el primer lugar entre los doce países participantes.

Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. No existe un registro estadístico sobre la participación de México antes del año 2004.

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
2004	Canadá	19	9
2005	Corea	19	13
2006	Corea	21	10
2007	Corea	21	10

Durante el mes de marzo de 2007 se aplicó el examen de la XIX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a todos los alumnos que en ese momento se encontraban en los entrenamientos. Dicho examen se aplica y califica en México. Los mejores exámenes se enviaron a Corea para ser evaluados por el comité coreano. Los alumnos que obtuvieron medalla fueron: Isaac Buenrostro

Morales (Jalisco) con medalla de plata; Erick Alejandro Gallegos Baños (Oaxaca), Fernando Campos García (Distrito Federal), Andrés Leonardo Gómez Emilsson (Distrito Federal), Marco Antonio Ávila Ponce de León (Yucatán), Manuel Jesús Novelo Puc (Yucatán) y Cristian Manuel Oliva Avilés (Yucatán) con medalla de bronce. Los siguientes alumnos obtuvieron mención honorífica: Eduardo Velasco Barrera (Sonora) y Malors Emilio Espinosa Lara (Jalisco). México ocupó el lugar número 10 de los 21 países participantes.

Número de Medallas obtenidas en Concursos Internacionales

La siguiente tabla contiene el número total de medallas obtenidas por México en las Olimpiadas Internacionales.

Olimpiada	*Oro*	*Plata*	*Bronce*	*Mención Honorífica*
Internacional	1	5	33	23
Iberoamericana	15	31	23	3
Centroamericana	16	9	2	0
Cuenca del Pacífico[1]	2	4	12	16

[1] Desde 2004.

Resultados del Concurso Nacional de la 21^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 11 al 16 de noviembre de 2007 se llevó a cabo en Saltillo, Coahuila, el Concurso Nacional de la 21^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Los 18 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Anguiano Chávez Marcelino (Chihuahua)
López Buenfil Manuel Guillermo (Chihuahua)
Isaías Castellanos Luis Ángel (Colima)
Díaz Nava Benito Clemente (Hidalgo)
Espinoza Lara Malors Emilio (Jalisco)
Gallegos Bernal Paul Iván (Jalisco)
Mendoza Orozco Rodrigo (Jalisco)
Álvarez Rebollar José Luis (Michoacán)
Blanco Sandoval Bruno (Morelos)
Campero Núñez Andrés (Morelos)

Pacchiano Camacho Aldo (Morelos)
Gallegos Baños Erik Alejandro (Oaxaca)
Juárez Ojeda Rígel Apolonio (Puebla)
Velasco Barreras Eduardo (Sonora)
Culebro Reyes Jakob (Veracruz)
Novelo Puc Manuel Jesús (Yucatán)
Tuyub Román Daniel Abisai (Yucatán)
Vera Ruiz Alan Alejandro (Yucatán)

Los 5 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Hernández González Flavio (Aguascalientes)
Arreola Gutiérrez Fernando Ignacio (Aguascalientes)
Dosal Bustillos Manuel Enrique (Chihuahua)
Ríos Velázquez Mónica del Carmen (Nuevo León)
Vera Garza José Carlos (Nuevo León)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 21^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

1. Jalisco
2. Morelos
3. Yucatán
4. Chihuahua
5. Colima
6. Nuevo León
7. Sonora
8. Veracruz
9. Puebla
10. Michoacán

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "Águila que Vuela" y fue ganado por Colima. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, Oaxaca y Veracruz, respectivamente.

Agradecimientos

Agradecemos a todos los estados que colaboraron con los problemas que aparecen en este folleto. Agradecemos a Gabriela Campero Arena la revisión de los problemas y a Radmila Bulajich Manfrino la elaboración de las figuras.

Información sobre la Olimpiada

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, visita nuestro sitio de Internet:

http://www.omm.unam.mx/

COMITÉ ORGANIZADOR DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Enero de 2008

Enunciados de los Problemas

Para mostrar el tipo de problemas que se manejan en la fase estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, presentamos aquí algunos ejemplos de ellos. Las soluciones se encuentran después.

Problema 1. Jorge Luis cortó un cuadrado de papel que tenía 20 cm de perímetro y obtuvo dos rectángulos. Si el perímetro de uno de los rectángulos recortados es 16 cm, ¿cuál es el perímetro del otro?

(a) 8 cm (b) 9 cm (c) 12 cm (d) 14 cm (e) 16 cm

Problema 2. En la cuadrícula de la figura se deben escribir los números 1, 2 y 3 de manera que un número no aparezca dos veces en el mismo renglón o en la misma columna. ¿Qué números pueden escribirse en la celda que está marcada con un $*$?

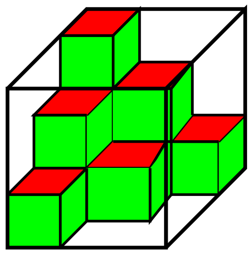
1	$\star$	
2	1	

(a) Sólo 3 (b) Sólo 2 (c) Sólo 1
(d) Cualquiera de 2 o 3 (e) Cualquiera de 1, 2 o 3

Problema 3. Mario, Pedro, Ignacio, Jorge y Angélica están formados en una fila. Mario está después de Ignacio, Angélica está antes de Mario y justo después de Jorge. Jorge está antes de Ignacio pero Jorge no es el primero de la fila. ¿Cuál es el lugar de Pedro en la fila?

(a) Primero (b) Segundo (c) Tercero (d) Cuarto (e) Quinto

Problema 4. Natalia tiene varios cubos de plástico y los acomodó dentro de una pecera cúbica de cristal, tal como se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos más necesita Natalia para llenar la pecera por completo?



(a) 9 (b) 13 (c) 17 (d) 21 (e) 27

Problema 5. Un cubo de madera blanca se mete en una cubeta con pintura azul. Cuando la pintura se ha secado, el cubo se corta en 27 cubitos idénticos. ¿Cuántos cubitos tienen exactamente dos caras pintadas?

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) 12

Problema 6. Después de partir un pastel, Sandra se quedó con $\frac{2}{3}$ mientras que Verónica se quedó con $\frac{1}{3}$. Para evitar que su amiga se enojara, Sandra cortó $\frac{1}{4}$ de su porción y se lo dio a Verónica. En este momento:

(a) Sandra tiene $\frac{5}{12}$ del pastel
(b) Sandra tiene $\frac{1}{4}$ del pastel
(c) Sandra tiene $\frac{7}{12}$ del pastel
(d) Sandra tiene $\frac{1}{2}$ del pastel
(e) Sandra tiene $\frac{1}{3}$ del pastel

Problema 7. Los números $\frac{1234}{321}$, 10^2, $\sqrt[3]{100000}$, $1+10+10^2$, π^5, se van a acomodar en orden creciente. ¿Cuál número debe quedar en medio?

(a) $\frac{1234}{321}$ (b) 10^2 (c) $\sqrt[3]{100000}$ (d) $1+10+10^2$ (e) π^5

Problema 8. Arturo, Juan Pablo y Francisco tienen 30 canicas entre los tres. Si Francisco le da 5 canicas a Juan Pablo, Juan Pablo le da 4 canicas a Arturo y Arturo le da 2 canicas a Francisco, todos quedan con la misma cantidad. ¿Cuántas canicas tenía Francisco al principio?

(a) 8 (b) 9 (c) 11 (d) 12 (e) 13

Problema 9. Los asientos de un carrusel están numerados con los números $1, 2, 3, \ldots$. Si Arturo está sentado en el número 11 y Brenda está sentada en el número 4, diametralmente opuesta a él, ¿cuántos asientos tiene el carrusel?

(a) 13 (b) 14 (c) 16 (d) 17 (e) 22

Problema 10. La letra que está en la posición 2007 de la secuencia $CANGUROCANGUROCANG$... es:

(a) C (b) A (c) N (d) G (e) U

Problema 11. En una hoja de papel de 15 cm $\times$ 9 cm se cortaron cuadrados en cada una de sus esquinas para obtener una cruz. Si cada uno de los cuadrados tenía un perímetro de 8 cm, ¿cuál es el perímetro de la cruz?

(a) 48 cm (b) 40 cm (c) 32 cm (d) 24 cm (e) 16 cm

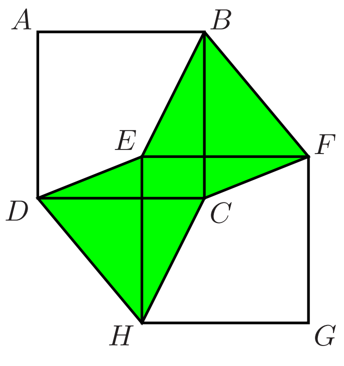
Problema 12. Sabiendo que x es un entero negativo, ¿cuál de los siguientes números es mayor?

(a) $-2x$ (b) $2x$ (c) $x+1$ (d) $6x+2$ (e) $x-2$

Problema 13. Para obtener 8^8 debemos elevar 4^4 a la potencia:

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 8 (e) 16

Problema 14. En la figura, $ABCD$ y $EFGH$ son dos cuadrados iguales. El área de la región sombreada es 1. ¿Cuál es el área del cuadrado $ABCD$?

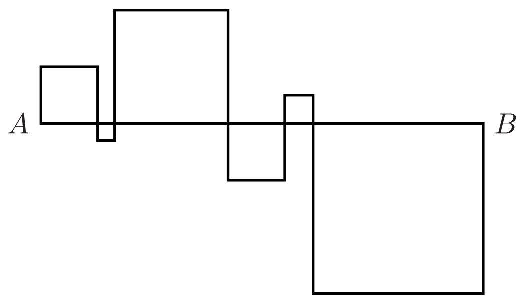


(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) 1 (e) Depende de la figura

Problema 15. Hay 60 pájaros en tres árboles. Después de escuchar un disparo vuelan 6 pájaros del primer árbol, 8 pájaros del segundo y 4 pájaros del tercero. Si ahora hay el doble de pájaros en el segundo que en el primer árbol, y el doble en el tercero respecto al segundo, ¿cuántos pájaros había originalmente en el segundo árbol?

(a) 7 (b) 11 (c) 15 (d) 20 (e) 24

Problema 16. En la figura se muestran 6 cuadrados. Sabiendo que el segmento de A a B mide 24, ¿cuál es la suma de los perímetros de los 6 cuadrados?

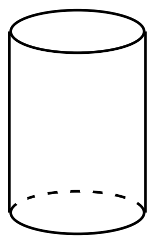


(a) 48 cm (b) 72 cm (c) 96 cm (d) 56 cm (e) 106 cm

Problema 17. Jorge pensó un número, Liz multiplicó por 5 o 6 al número que pensó Jorge, Óscar le sumó 5 o 6 al resultado de Liz y finalmente Alejandro le restó 5 o 6 al resultado de Óscar y obtuvo 78. ¿Cuál fue el número que pensó Jorge?

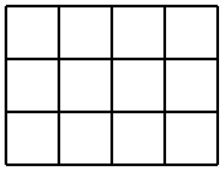
(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Problema 18. El cilíndro de la figura está hecho de dos círculos y un rectángulo de papel. Si el área de cada una de las piezas es π, ¿cuál es la altura del cilíndro?



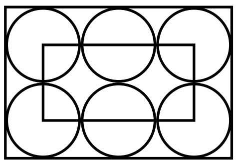
(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{\pi}$ (d) π^2 (e) Depende de la forma en que fue construido

Problema 19. En la tabla de la figura hay 12 celdas, que han sido dibujadas usando 4 líneas horizontales y 5 verticales. ¿Cuál es la mayor cantidad de celdas que se pueden obtener dibujando 15 líneas en total?



(a) 30 (b) 36 (c) 40 (d) 42 (e) 60

Problema 20. En la figura se muestran 6 círculos idénticos. Sabiendo que el rectángulo pequeño pasa sobre los centros de todos los círculos y que su perímetro es 60 cm, ¿cuál es el perímetro del rectángulo grande?



(a) 160 cm (b) 140 cm (c) 120 cm (d) 100 cm (e) 80 cm

Problema 21. Una calculadora descompuesta no muestra el número 1 en la pantalla. Por ejemplo, si escribimos el número 3131 en la pantalla se ve escrito el 33 (sin espacios). Pepe escribió un número de seis dígitos en la calculadora, pero apareció 2007. ¿Cuántos números pudo haber escrito Pepe?

(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Problema 22. Mónica salió a correr durante dos horas. Su recorrido empezó en un terreno plano donde su velocidad fue de 4 km/h y siguió con un terreno inclinado donde su velocidad fue de 3 km/h. Regresando por el mismo lugar, la velocidad en la parte inclinada fue de 6 km/h mientras que la velocidad en la parte plana fue de 4 km/h. ¿Cuál es la distancia total (ida y vuelta) que recorrió Mónica?

(a) Imposible de determinar (b) 6 km (c) 75 km (d) 8 km (e) 10 km

Problema 23. El primer dígito de un número de 4 dígitos es la cantidad de ceros que aparecen en él, el segundo dígito es la cantidad de 1's, el tercer dígito es la cantidad de 2's y el último dígito es la cantidad de 3's. ¿Cuántos números de cuatro dígitos cumplen con estas condiciones?

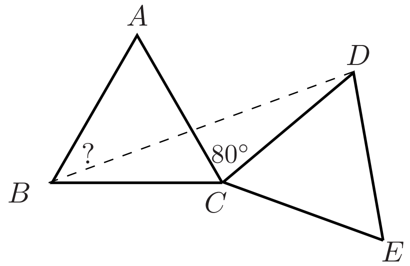
(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 24. Gaby tachó cuatro números de la cuadrícula que se muestra en la figura y Lilia tachó cuatro números de los restantes. Si sabemos que la suma de los números tachados por Lilia es el triple de la suma de los números tachados por Gaby, ¿cuál es el número que no se tachó?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 9

Problema 25. En la figura, ABC y CDE son dos triángulos equiláteros iguales. Si el ángulo ACD mide $80°$, ¿cuánto mide el ángulo ABD?



(a) $25°$ (b) $30°$ (c) $35°$ (d) $40°$ (e) $45°$

Problema 26. Cinco enteros se escriben en círculo de forma que no haya dos o tres números consecutivos cuya suma sea múltiplo de tres. ¿Cuántos de esos cinco números son divisibles entre tres?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) Imposible de determinar

Problema 27. Si M es el 30 % de Q, Q es el 20 % de P, y N es el 50 % de P, ¿cuánto vale $\frac{M}{N}$?

(a) $\frac{3}{250}$ (b) $\frac{3}{25}$ (c) 1 (d) $\frac{6}{5}$ (e) $\frac{4}{3}$

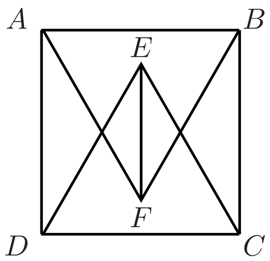
Problema 28. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar borrando al menos una de las letras de la palabra ANTENA? Por ejemplo, algunas palabras que se obtienen así son A, TNA, ANTNA.

(a) $2^6 - 4$ (b) 2^5 (c) $3 \cdot 2^4$ (d) $6! - 4!$ (e) $6! - 2!$

Problema 29. ¿Cuántos números n satisfacen al mismo tiempo las 5 condiciones siguientes?
1. n es par.
2. n deja residuo 1 al dividirlo entre 5.
3. n es múltiplo de 7.
4. n es menor que 1000.
5. La suma de los dígitos de n es 23.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 30. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado y los triángulos ABF y DEC son equiláteros. Si $AB = 1$, ¿cuál es la longitud de EF?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3} - 1$ (e) $\frac{3}{2}$

Problema 31. Mi clave secreta es un número de tres dígitos. Si lo divido entre 9 tengo como resultado un número cuya suma de dígitos disminuye en 9 con respecto a la suma de los dígitos de mi clave. ¿Cuántos números pueden ser mi clave secreta?

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5 (e) 11

Problema 32. ¿Cuántos números de cuatro cifras $N = abcd$ cumplen las siguientes tres condiciones?
1. $4,000 \leq N < 6,000$. 2. N es múltiplo de 5. 3. $3 \leq b < c \leq 6$.

(a) 10 (b) 18 (c) 24 (d) 36 (e) 48

Problema 33. La gráfica de la función $f(x)$ es una recta y se verifica que $f(1) \leq f(2)$, $f(3) \geq f(4)$ y $f(5) = 5$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) $f(0) < 0$ (b) $f(0) = 0$ (c) $f(1) < f(0) < f(-1)$
(d) $f(0) = 5$ (e) $f(0) > 5$

Problema 34. Los números reales $a \neq 0$ y $b \neq 0$ cumplen que $ab = a - b$. ¿Cuál de los siguientes valores es un valor posible para $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$?

(a) -2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) 2

Problema 35. Si unimos los centros de cada par de caras adyacentes de un cubo, formamos un octaedro regular. ¿Cuál es el cociente entre el volumen del octaedro y el volumen del cubo?

(a) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (b) $\frac{\sqrt{16}}{16}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (e) $\frac{1}{4}$

Problema 36. Sean x, y, z, enteros no negativos tales que $x + y + z = 12$. ¿Cuál es el valor más grande de la suma $xyz + xy + yz + zx$?

(a) 62 (b) 72 (c) 92 (d) 102 (e) 112

Problema 37. ¿Cuál de los siguientes enteros se puede escribir como suma de 100 enteros positivos consecutivos?

(a) $1,627,384,950$ (b) $2,345,678,910$ (c) $3,579,111,300$
(d) $4,692,581,470$ (e) $5,815,937,260$

Problema 38. En el triángulo ABC se sabe que $3 \operatorname{sen} A + 4 \cos B = 6$ y $4 \operatorname{sen} B + 3 \cos A = 1$. ¿Cuánto mide el ángulo C?

(a) $30°$ (b) $60°$ (c) $90°$ (d) $120°$ (e) $150°$

Problema 39. La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisface que $a_1 = 19$, $a_9 = 99$ y para $n \geq 3$, a_n es el promedio de los primeros $n - 1$ términos. Encuentra el valor de a_2.

(a) 29 (b) 59 (c) 79 (d) 99 (e) 179

Problema 40. Los vértices de un triángulo inscrito en una circunferencia dividen a ésta en tres arcos de longitudes 3, 4 y 5. ¿Cuál es el área de dicho triángulo?

(a) 6 (b) $\frac{18}{\pi^2}$ (c) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$

(d) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+1)$ (e) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$

Problema 41. Sea $E(n)$ la suma de los dígitos pares de n. Por ejemplo, $E(5681) = 6 + 8 = 14$. ¿Cuál es el valor de $E(1) + E(2) + \cdots + E(100)$?

(a) 200 (b) 360 (c) 400 (d) 900 (e) 2250

Problema 42. Si se sabe que: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, ¿cuál es el valor de:

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots ?$$

(a) $\frac{\pi^2}{7}$ (b) $\frac{\pi^2}{8}$ (c) $\frac{\pi^2}{9}$ (d) $\frac{\pi^2}{10}$ (e) $\frac{\pi^2}{12}$

Problema 43. En el triángulo isósceles ABC se tiene que $AB = 2BC$. Si el perímetro de ABC es 300 cm, ¿cuánto mide AC?

(a) 60 cm (b) 80 cm (c) 100 cm (d) 120 cm (e) 140 cm

Problema 44. Una función f definida en los enteros satisface que:

$$f(n) = \begin{cases} n+3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Si k es un entero impar y $f(f(f(k))) = 27$, ¿cuál es la suma de los dígitos de k?

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 12 (e) 15

Problema 45. La suma de las longitudes de las 12 aristas de una caja rectangular es 140 y la distancia de una esquina de la caja a la esquina más lejana es 21. ¿Cuál es el área total de la caja?

(a) 776 (b) 784 (c) 798 (d) 800 (e) 812

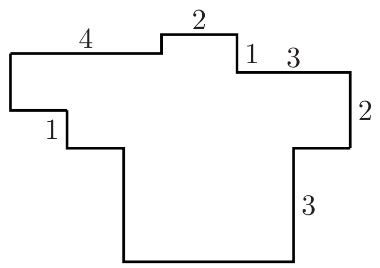
Problema 46. Un número *alcanzable* como 34689, es un entero positivo en el que cada dígito es mayor que el que está a su izquierda. Se sabe que hay $\binom{9}{5} = 126$ números alcanzables de cinco dígitos. Cuando estos números se ordenan de menor a mayor, el que ocupa el lugar número 97 en la lista no contiene el dígito:

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 47. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una sucesión de números enteros que satisface las siguientes propiedades:
1. $-1 \leq x_i \leq 2$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
2. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 19$.
3. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 99$.
Sean m y M los valores mínimo y máximo de la expresión $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3$, respectivamente. ¿Cuál es el valor de $\frac{M}{m}$?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 48. En la siguiente figura cada número indica la medida de cada segmento. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

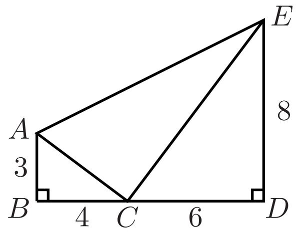


(a) 16 (b) 15 (c) 32 (d) 30 (e) No se puede determinar

Problema 49. ¿De cúantas formas se pueden acomodar los números del 1 al 9 en una cuadrícula de 3×3 de tal manera que no haya dos números de la misma paridad en casillas que comparten un lado?

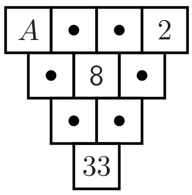
(a) 2808 (b) 3000 (c) 2880 (d) 2900 (e) 144

Problema 50. En la siguiente figura se tiene que los ángulos ABC y CDE son rectos. ¿Cuánto mide el segmento AE?



(a) 5 (b) $5\sqrt{3}$ (c) 10 (d) $5\sqrt{5}$ (e) $3\sqrt{5}$

Problema 51. Originalmente en la siguiente figura había un entero en cada casilla. Los números de la segunda fila, tercera fila y cuarta fila cumplían con la propiedad de que cada número en la casilla era igual a la suma de los dos números en las dos casillas que están inmediatamente arriba de ella. Después de un tiempo algunos números se borraron. ¿Qué número estaba en la casilla marcada con la letra A?

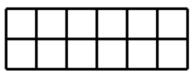


(a) 8 (b) 2 (c) 7 (d) 14 (e) No se puede determinar

Problema 52. ¿Cuántos divisores positivos tiene el número 10000 que no sean múltiplos de 100?

(a) 25 (b) 16 (c) 0 (d) 9 (e) 34

Problema 53. ¿De cuántas formas se puede llenar el siguiente arreglo con 1's y -1's de tal manera que la suma de los números en cada renglón y en cada columna sea 0?

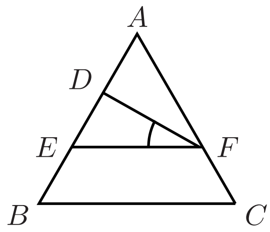


(a) 20 (b) 1 (c) 10 (d) 15 (e) 18

Problema 54. Los lados de un triángulo son 2, 3 y x. Si el área también es x, ¿cuánto vale x?

(a) $\sqrt{5}$ (b) 4 (c) 3 (d) 2 (e) 1

Problema 55. En la siguiente figura se tiene que el triángulo ABC es equilátero de lado 3, con $BE = DA = FC = 1$. ¿Cuánto mide el ángulo DFE?



(a) $10°$ (b) $15°$ (c) $45°$ (d) $80°$ (e) $30°$

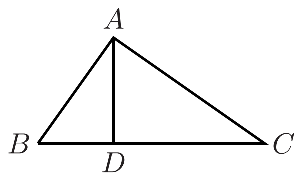
Problema 56. El máximo número de valores enteros que pueden ser obtenidos de la expresión:

$$\frac{100}{2n-1},$$

donde n es un entero positivo es:

(a) 9 (b) 7 (c) 5 (d) 3 (e) 1

Problema 57. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Sea D el pie de la altura desde A. Si $AB = 5$ y $BD = 3$, determina el área del triángulo ADC.



(a) 2 (b) $\frac{3}{4}$ (c) 9 (d) $\frac{5}{3}$ (e) $\frac{32}{3}$

Problema 58. Para elegir el número ganador de una rifa, se elegirá al azar un número entre el 1 y el 2007, se le restará la suma de sus dígitos y finalmente se le sumará 5. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser premiado?

(a) 1272 (b) 1922 (c) 1031 (d) 518 (e) 1769

Problema 59. Empiezas con el número 1. Una "operación" consiste en multiplicar el número 1 por 3 y sumarle 5, luego, multiplicar el resultado anterior por 3 y sumarle 5, y así sucesivamente. ¿Cuál es el dígito de las unidades después de aplicar la operación 2007 veces?

(a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) 8 (e) 9

Problema 60. ¿Cuántas ternas x, y, z de números reales positivos satisfacen el sistema:

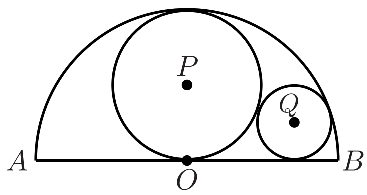
$$\begin{aligned} x(x+y+z) &= 26 \\ y(x+y+z) &= 27 \\ z(x+y+z) &= 28? \end{aligned}$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) Ninguna

Problema 61. ¿De cuántas formas se puede colorear un tablero de 3×3, si cada cuadrito se debe colorear con uno de los colores azul, blanco o café y además en cada columna y en cada renglón deben estar los tres colores?

(a) 12 (b) 14 (c) 16 (d) 20 (e) 24

Problema 62. El segmento AB es diámetro de un semicírculo con centro en O. Un círculo con centro en P es tangente a AB en O y también al semicírculo. Otro círculo con centro en Q es tangente a AB, al semicírculo y al círculo de centro en P. Si $OB = 1$, ¿cuál es la medida del radio del círculo con centro en Q?



(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{1}{4}$

Problema 63. ¿Cuál es la suma de todos los números enteros entre el 1 y el 999 que se escriben con exactamente dos unos?

(a) 6000 (b) 6666 (c) 6668 (d) 6880 (e) 6882

Problema 64. Si a y b son números enteros positivos, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación:

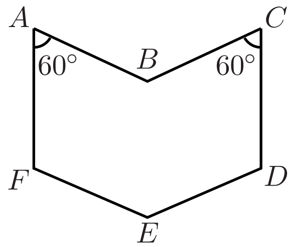
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{500}?$$

(a) 20 (b) 25 (c) 30 (d) 35 (e) 40

Problema 65. Enrique tiene 3 hermanas y 5 hermanos. Su hermana Enriqueta tiene y hermanas y z hermanos. ¿Cuánto vale el producto yz?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 15 (e) 18

Problema 66. En la figura, los lados AF y CD son paralelos, AB y FE son paralelos, y BC y ED son paralelos. Si cada lado tiene longitud 1 y $\angle FAB = \angle BCD = 60°$, entonces el área de toda la figura es:



(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\sqrt{3}$ (e) 2

Problema 67. Si el promedio de 15 enteros positivos distintos es 13, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar el segundo número más grande de estos enteros?

(a) 51 (b) 52 (c) 53 (d) 54 (e) 55

Problema 68. En el triángulo ABC, el ángulo en C mide $90°$. Sean E y F puntos en la hipotenusa AB tales que $AE = AC$ y $BF = BC$. Entonces, el ángulo ECF mide:

(a) $30°$ (b) Entre $30°$ y $45°$ (c) $45°$ (d) Entre $45°$ y $60°$ (e) $60°$

Problema 69. ¿Cuántos enteros positivos de dos dígitos son menores que el producto de sus dígitos?

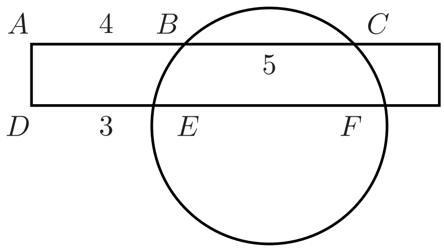
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 45

Problema 70. ¿Cuánto es:

$$2007^2 - 2006^2 + 2005^2 - 2004^2 + \cdots + 3^2 - 2^2?$$

(a) $1004 \cdot 2007 + 1$ (b) 1003^2 (c) $1004 \cdot 2007$
(d) $1003^2 - 1$ (e) $1004 \cdot 2007 - 1$

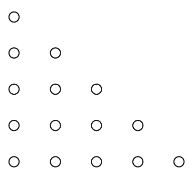
Problema 71. Un rectángulo corta a un círculo como se muestra en la figura.



Si $AB = 4$, $BC = 5$ y $DE = 3$, entonces EF es igual a:

(a) 6 (b) 7 (c) $\frac{20}{3}$ (d) 8 (e) 9

Problema 72. Hay 5 clavijas amarillas, 4 clavijas rojas, 3 verdes, 2 azules y 1 anaranjada que se van a colocar en el arreglo triangular que se muestra. ¿De cuántas maneras pueden colocarse las clavijas de tal modo que ninguna fila (horizontal) ni ninguna columna (vertical) contenga dos clavijas del mismo color?



(a) 0 (b) 1 (c) $5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$ (d) $\frac{15!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$ (e) $15!$

Problema 73. ¿Para cuántos enteros positivos n, el número $n^3 - 8n^2 + 20n - 13$ es un número primo?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) Más de 4

Problema 74. Si a y b son números distintos tales que:

$$\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2,$$

¿cuánto vale $\frac{a}{b}$?

(a) 0.4 (b) 0.5 (c) 0.6 (d) 0.7 (e) 0.8

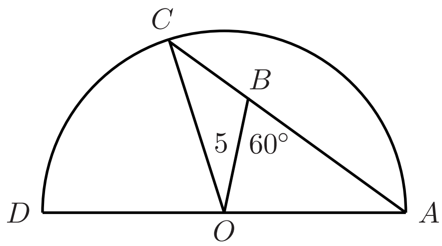
Problema 75. Se quieren pintar las casillas de un tablero de 4×4 de blanco y de negro, de tal manera que haya exactamente dos casillas negras y dos casillas blancas en cada renglón y en cada columna. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

(a) 36 (b) 54 (c) 72 (d) 120 (e) 90

Problema 76. Si se sabe que $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$, entonces $27^7 + 84^7 + 110^7 + 133^7$ es:

(a) Menor que $144^7 - 1$ (b) Igual a $144^7 - 1$ (c) Igual a 144^7
(d) Igual a $144^7 + 1$ (e) Mayor que $144^7 + 1$

Problema 77. En un círculo con centro O, AD es un diámetro, ABC es una cuerda, $BO = 5$ y $\angle ABO = \widehat{CD} = 60°$ como se muestra en la figura. Entonces, la longitud de BC es:



(a) 3 (b) $3 + \sqrt{3}$ (c) $5 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 5 (e) Ninguna de las anteriores

Problema 78. Si $f(x) = px^7 + qx^3 + rx - 4$ y $f(-7) = 3$, ¿a qué es igual $f(7)$?

(a) 3 (b) -3 (c) -11 (d) 11 (e) -7

Problema 79. Simplifica:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

suponiendo que ningún denominador es igual a cero.

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) -1 (e) 2

Problema 80. Para cada entero positivo k, sea S_k la progresión aritmética creciente de enteros cuyo primer término es 1 y cuya diferencia común es k. Por ejemplo, S_3 es la progresión $1, 4, 7, 10, \ldots$. ¿Para cuántos valores de k, S_k contiene el número 2008?

(a) 0 (b) 2 (c) 6 (d) 10 (e) 2008

Problema 81. Si $x = \dfrac{4}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[16]{5}+1)}$, encuentra el valor de $(x+1)^{48}$.

(a) 100 (b) 125 (c) 148 (d) 216 (e) 224

Problema 82. Si n es un entero positivo, denotamos con $\tau(n)$ al número de divisores positivos de n, incluyendo a 1 y a n. Por ejemplo, $\tau(1) = 1$ y $\tau(6) = 4$. Definimos $S(n) = \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n)$. Si a denota al número de enteros positivos $n \leq 2008$ con $S(n)$ impar, y b denota al número de enteros positivos $n \leq 2008$ con $S(n)$ par, calcula $|a-b|$.

(a) 28 (b) 42 (c) 68 (d) 100 (e) 106

Problema 83. Un ciclista ha recorrido dos tercios de su trayecto cuando se le poncha una llanta. Decide terminar su recorrido a pie, pero este tramo del viaje le toma el doble de tiempo del que hizo en bicicleta. ¿Cuántas veces más rápido anda en bicicleta que a pie?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 10

Problema 84. Sea $ABCD$ un cuadrado de centro O. Sobre los lados DC y AD se han construido los triángulos equiláteros EDC y FAD. ¿Cuál es la razón del área del triángulo FDE entre el área del triángulo DOC?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{3}{2}$ (e) 2

Problema 85. Considera un entero positivo M que cumple la siguiente propiedad: si escogemos al azar un número x del conjunto $\{1, 2, \ldots, 1000\}$, la probabilidad de que x sea un divisor de M es igual a $\frac{1}{100}$. Si $M \leq 1000$, ¿cuál es el mayor valor posible de M?

(a) 540 (b) 976 (c) 1084 (d) 1460 (e) 2008

Problema 86. La ecuación $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ tiene tres soluciones reales: a, b y c. ¿Cuál es el valor de $a^5 + b^5 + c^5$?

(a) 3281 (b) 2381 (c) 8321 (d) 1283 (e) 2813

Problema 87. Dos circunferencias C_1 y C_2 tienen una cuerda común AB. Se elige un punto P en C_1 de manera que quede afuera de C_2. Sean X, Y los puntos de intersección de PA y PB con C_2, respectivamente. Si $AB = 4$, $PA = 5$, $PB = 7$ y $AX = 16$, ¿cuánto mide XY?

(a) 6 (b) 7 (c) 9 (d) 12 (e) 14

Problema 88. Una bolsa contiene 8 fichas negras y las demás son rojas. Si la probabilidad de sacar una ficha roja es de $\frac{2}{3}$, ¿cuántas fichas hay en la bolsa?

(a) 16 (b) 18 (c) 20 (d) 22 (e) 24

Problema 89. Si a y b son números reales tales que $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}$, ¿cuánto vale $\operatorname{sen}(a + b)$?

(a) 0 (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) $\frac{3}{2}$

Problema 90. ¿Cuántos divisores tiene 2008^{2008} que son cuadrados perfectos?

(a) 1005×1006 (b) 1005^2 (c) 1005×3013 (d) 1005×4015 (e) 1005^3

Problema 91. En el triángulo ABC, M es el punto en BC tal que $BM = 5$ y $MC = 6$. Si $AM = 3$ y $AB = 7$, ¿cuánto mide AC?

(a) $\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{3}$ (c) $5\sqrt{3}$ (d) $7\sqrt{3}$ (e) $9\sqrt{3}$

Problema 92. Después de desarrollar y reducir términos semejantes, ¿cuántos términos quedan en la expresión:

$$(x+y+z)^{2008}+(x-y-z)^{2008}?$$

(a) 1001^2 (b) 1002^2 (c) 1003^2 (d) 1004^2 (e) 1005^2

Problema 93. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros que satisface $P(17)=10$ y $P(24)=17$. Si la ecuación $P(x)=x+3$ tiene en total dos soluciones enteras distintas a y b, ¿a qué es igual $a \times b$?

(a) 400 (b) 418 (c) 430 (d) 476 (e) 488

Problema 94. ¿A qué es igual $\sqrt{\operatorname{sen}^4 x+4\cos^2 x}-\sqrt{\cos^4 x+4\operatorname{sen}^2 x}$?

(a) $\cos x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos 3x$ (d) $\cos 4x$ (e) $\cos 5x$

Problema 95. ¿Cuántos divisores primos distintos tiene el entero positivo N si:

$$\log_2(\log_3(\log_5(\log_7 N)))=11?$$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) 7

Problema 96. Un poliedro convexo P tiene 26 vértices, 60 aristas y 36 caras. De las 36 caras, 24 son triángulos y 12 son cuadriláteros. Una "diagonal espacial" es una recta que une dos vértices no adyacentes que no pertenecen a la misma cara. ¿Cuántas diagonales espaciales tiene P?

(a) 217 (b) 229 (c) 241 (d) 265 (e) 325

Problema 97. El número:

$$\sqrt{104\sqrt{6}+468\sqrt{10}+144\sqrt{15}+2008}$$

se puede escribir en la forma $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}$, donde a, b y c son enteros positivos. ¿Cuánto vale el producto abc?

(a) 312 (b) 936 (c) 468 (d) 234 (e) 104

Problema 98. Sean x, y, z números reales que satisfacen:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{y^2 - \frac{1}{16}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{16}}, \\ y &= \sqrt{z^2 - \frac{1}{25}} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{25}}, \\ z &= \sqrt{x^2 - \frac{1}{36}} + \sqrt{y^2 - \frac{1}{36}}, \end{aligned}$$

y además $x + y + z = \frac{m}{\sqrt{n}}$ donde m y n son enteros positivos y n no es divisible por el cuadrado de ningún número primo. ¿A qué es igual $m + n$?

(a) 9 (b) 15 (c) 23 (d) 31 (e) 37

Problema 99. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sean AA', BB', CC' y DD' rayos paralelos en el espacio del mismo lado del plano determinado por $ABCD$. Si $AA' = 10$, $BB' = 8$, $CC' = 18$, $DD' = 22$ y M y N son los puntos medios de $A'C'$ y $B'D'$, respectivamente, hallar la longitud de MN.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 100. ¿Cuántas parejas ordenadas de enteros (m, n) tales que $mn \geq 0$, cumplen que $m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$?

(a) 2 (b) 3 (c) 33 (d) 35 (e) 99

Soluciones de los problemas

Solución del problema 1. La respuesta es (d).
La suma de los perímetros de los rectángulos es igual al perímetro del cuadrado original más dos veces la longitud del corte que se hizo, es decir, $20+5+5=30$ cm. El perímetro que buscamos es $30-16=14$ cm.

Solución del problema 2. La respuesta es (a).
La única forma de completar la cuadrícula es la siguiente:

1	3	2
2	1	3
3	2	1

Solución del problema 3. La respuesta es (a).
El orden de la fila es Pedro, Jorge, Angélica, Ignacio y Mario.

Solución del problema 4. La respuesta es (c).
Natalia necesita 3 cubos en el primer nivel (el de más abajo), 6 cubos en el segundo nivel y 8 cubos en el tercer nivel. Es decir, en total $3+6+8=17$.

Solución del problema 5. La respuesta es (e).
Si volvemos a armar el cubo, veremos que hay exactamente un cubito con exactamente dos caras azules por cada arista del cubo original. Por lo tanto, la respuesta es 12.

Solución del problema 6. La respuesta es (d).
Sandra se quedó con $\frac{2}{3}-(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3})=\frac{1}{2}$ del pastel.

Solución del problema 7. La respuesta es (b).
La respuesta es clara observando que $\frac{1234}{321} < 4$, $\sqrt[3]{100000} < \sqrt[3]{10^6} = 100$, $10^2 = 100$, $1 + 10 + 10^2 = 111$ y $\pi^5 > 3^5 = 243$.

Solución del problema 8. La respuesta es (e).
Al final del intercambio todos tienen 10 canicas y como Francisco se quedó con 3 canicas menos, entonces originalmente tenía 13.

Solución del problema 9. La respuesta es (b).
Si el 4 y el 11 están diametralmente opuestos, entonces también están diametralmente opuestos los números 3 y 12, 2 y 13, 1 y 14. Por lo tanto, el carrusel tiene 14 asientos.

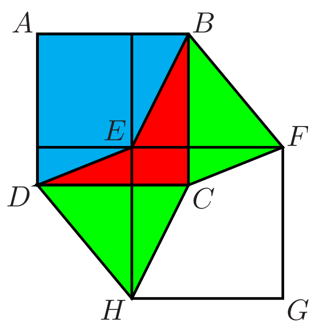
Solución del problema 10. La respuesta es (e).
Cada letra de la palabra CANGURO se repite cada 7 veces. Como al dividir 2007 entre 7 obtenemos de residuo 5, la letra que está en la posición 2007 será la quinta letra, es decir, la U.

Solución del problema 11. La respuesta es (a).
El perímetro de la cruz es igual al perímetro de la hoja original, es decir, $2(15 + 9) = 48$ cm.

Solución del problema 12. La respuesta es (a).
Si x es un entero negativo, entonces $x \leq -1$. Luego, $-2x \geq 2$, $2x \leq -2$, $x + 1 \leq 0$, $6x + 2 \leq -4$ y $x - 2 \leq -3$.

Solución del problema 13. La respuesta es (b).
Tenemos que $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24} = 4^{12} = (4^4)^3$. Por lo tanto, la respuesta es 3.

Solución del problema 14. La respuesta es (d).
En la figura, el área del triángulo AEB es igual al área del triángulo DCH, y el área del triángulo AED es igual al área del triángulo BCF.



Por lo tanto, el área del cuadrado $ABCD$ es igual al área del hexágono $BEDHCF$ que es 1.

Solución del problema 15. La respuesta es (d).
Después del disparo quedan $60-6-8-4=42$ pájaros en los árboles. Si x es la cantidad de pájaros del primer árbol, tenemos que $x+2x+4x=42$ de donde $x=6$. Por lo tanto, en el segundo árbol había $2(6)+8=20$ pájaros.

Solución del problema 16. La respuesta es (c).
La suma de los perímetros de todos los cuadrados es igual a 4 veces la suma de todos los segmentos que están sobre AB, es decir, $4\times 24=96$ cm.

Solución del problema 17. La respuesta es (c).
Supongamos que Jorge pensó en el número n. Entonces, el resultado de Alejandro es de alguna de las siguientes formas: $5n-1, 5n, 5n+1, 6n-1, 6n$ o $6n+1$. Como el resultado de Alejandro es 78, la única posibilidad es que $6n=78$, de donde $n=\frac{78}{6}=13$.

Solución del problema 18. La respuesta es (b).
Como el área de cada círculo es π, tenemos que $\pi=\pi\cdot r^2$, donde r es el radio de cada círculo. De aquí que $r=1$. Luego, el rectángulo tiene altura h y base 2π, de modo que $\pi=2\pi h$ y por lo tanto, $h=\frac{1}{2}$.

Solución del problema 19. La respuesta es (d).
Si se usan n líneas verticales y m líneas horizontales, se obtienen $(n-1)(m-1)$ celdas. Suponiendo que $n\geq m$, es fácil comprobar que la mayor cantidad de celdas se alcanza cuando $n=8$ y $m=7$.

Solución del problema 20. La respuesta es (d).
El perímetro del rectángulo pequeño es 60 cm y es igual a la suma de 12 radios. Luego, cada radio mide $\frac{60}{12}=5$ cm. Como el perímetro del rectángulo grande es igual a la suma de 20 radios, la respuesta es $5\times 20=100$ cm.

Solución del problema 21. La respuesta es (e).
Las opciones son 112007, 121007, 120107, 120017, 120071, 211007, 210107, 210017, 210071, 201107, 201017, 201071, 200117, 200171 y 200711.

Solución del problema 22. La respuesta es (d).
Llamemos x al recorrido en terreno plano y llamemos y al recorrido en terreno inclinado. Sabemos que $2=\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{x}{4}=\frac{3x+4y+2y+3x}{12}=\frac{6x+6y}{12}=\frac{x+y}{2}$,

de donde se obtiene que la mitad del recorrido es $x + y = 4$ km. Luego, la respuesta es 8 km.

Solución del problema 23. La respuesta es (b).
Es claro que el primer dígito (el de más a la izquierda) debe ser menor o igual que 3 y mayor que 0. Si el primer dígito es 3, entonces el resto deben ser ceros, pero esto no es posible porque el último dígito es la cantidad de 3's que en este caso es 1. Si el primer dígito es 2, entonces el tercer dígito debe ser mayor que 1, al mismo tiempo que los dígitos restantes son 0. Luego, la única posibilidad es 2020. Si el primer dígito es 1, entonces el segundo dígito es mayor que 1 y la única posibilidad es 1210. Por lo tanto, sólo hay 2 números que cumplen las condiciones.

Solución del problema 24. La respuesta es (d).
Sea g la suma de los números que tachó Gaby y sea x el número que no se tachó. Tenemos que $g + 3g + x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, de donde $45 - x$ debe ser múltiplo de 4. Luego, las únicas posibilidades para x son 9, 5 y 1. Intentando encontrar los números que seleccionó Gaby, es fácil ver que la única opción posible para el número no tachado es $x = 5$.

Solución del problema 25. La respuesta es (d).
El triángulo DCB es isósceles y el ángulo DCB mide $80° + 60° = 140°$, ya que cada ángulo interno de un triángulo equilátero mide $60°$. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, tenemos que el ángulo DBC mide $\frac{180°-140°}{2} = 20°$ y por lo tanto el ángulo ABD mide $60° - 20° = 40°$.

Solución del problema 26. La respuesta es (c).
No puede haber cuatro o cinco múltiplos de 3 porque forzosamente quedarían 2 consecutivos. Si hubiera tres múltiplos de 3, dos de ellos quedarían consecutivos. Si hubiera un sólo múltiplo de 3 o no hubiera ningún múltiplo de 3, entonces hay tres enteros consecutivos donde, o la suma de los tres es múltiplo de 3, o la suma de dos consecutivos es múltiplo de 3. Por lo tanto, sólo 2 de los números son divisibles entre 3.

Solución del problema 27. La respuesta es (b).
Tenemos que $M = 0.3Q = 0.3(0.2P) = 0.06P$ y $N = 0.5P$, de donde $\frac{M}{N} = \frac{0.06P}{0.5P} = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$.

Solución del problema 28. La respuesta es (a).
Para cada letra hay dos posibilidades: borrarla o no borrarla. Luego, tenemos un total de 2^6 casos diferentes. Eliminando la opción de no borrar ninguna letra

y las palabras que se pueden obtener de dos formas distintas (ANA, N y A), tenemos que el total de palabras es $2^6 - 4$.

Solución del problema 29. La respuesta es (b).
Como la suma de los dígitos de n es 23 y el número es menor que 1000, el número buscado debe tener 3 dígitos. Sabiendo que es par y que deja residuo 1 al dividirlo entre 5, podemos concluir que su último dígito es 6. Luego, los otros dos dígitos son 8 y 9. Finalmente, para que el número sea múltiplo de 7, la única posibilidad es 896.

Solución del problema 30. La respuesta es (d).
La altura de un triángulo equilátero de lado 1 es $\sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Observemos que sumar las longitudes de las alturas de los triángulos ABF y DEC es lo mismo que sumar la longitud de un lado del cuadrado y la longitud del segmento EF, es decir, $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}} = 1 + EF$, de donde $EF = \sqrt{3} - 1$.

Solución del problema 31. La respuesta es (d).
Sea n el número de mi clave. Denotaremos por $s(n)$ a la suma de los dígitos de n. Como todo entero al dividirse entre 9 deja el mismo residuo que al dividir la suma de sus dígitos entre 9, tenemos que $s(n)$ es múltiplo de 9 ya que n es múltiplo de 9. Suponiendo que $n = 9k$ con k un entero positivo, tenemos que $s(k) = s(n) - 9$ también es múltiplo de 9. Como $n \leq 999$ por ser n un número de tres dígitos, se sigue que $s(k) \leq 27 - 9 = 18$. Luego, como $s(k)$ es múltiplo de 9, las posibilidades para $s(k)$ son 9 y 18. Si $s(k) = 9$, entonces $s(n) = 18$ y las soluciones son $n = 486, 567, 648, 729$ y 972. Si $s(k) = 18$, entonces $s(n) = 27$, de donde $n = 999$ que no cumple la condición. Por lo tanto, la respuesta es 5.

Solución del problema 32. La respuesta es (c).
La condición 1 implica que a es alguno de los dígitos 4 o 5, la condición 2 implica que d es alguno de los dígitos 0 o 5, y la condición 3 implica que la pareja (b, c) es alguna de las seis parejas $(3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$. Por lo tanto, hay $2 \times 2 \times 6 = 24$ números N.

Solución del problema 33. La respuesta es (d).
Si la gráfica de $f(x)$ es una recta, entonces $f(x)$ es de la forma $f(x) = mx + b$. Luego, $f(1) = m + b$ y $f(2) = 2m + b$. Como $f(1) \leq f(2)$, entonces $m + b \leq 2m + b$ de donde $m \geq 0$. Por otra parte, $f(3) = 3m + b$ y $f(4) = 4m + b$. Como $f(3) \geq f(4)$, entonces $3m + b \geq 4m + b$ de donde $m \leq 0$. Por lo tanto, $m = 0$ y como $f(5) = 5$, tenemos que $b = 5$. Luego, $f(x) = 5$ y por lo tanto $f(0) = 5$.

Solución del problema 34. La respuesta es (e).
Tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab &= \frac{a^2+b^2-(ab)^2}{ab}\\ &= \frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{ab}\\ &= \frac{a^2+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{ab}\\ &= \frac{2ab}{ab}=2.\end{aligned}$$

Segunda Solución. Note que $a=\frac{a}{b}-1$ y $b=1-\frac{b}{a}$. Luego, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-(\frac{a}{b}-1)(1-\frac{b}{a})=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2)=2$.

Solución del problema 35. La respuesta es (c).
Si llamamos $2a$ a la longitud de la arista del cubo, la longitud de la arista del octaedro será $\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$. Así pues, el octaedro está formado por dos pirámides cuadrangulares, de arista de la base $a\sqrt{2}$ y de altura a, por lo que su volumen será $2\cdot\frac{1}{3}(a\sqrt{2})^2\cdot a=\frac{4}{3}a^3$. Como el volumen del cubo es $(2a)^3=8a^3$, el cociente pedido será:

$$\frac{\frac{4}{3}a^3}{8a^3}=\frac{1}{6}.$$

Solución del problema 36. La respuesta es (e).
Note que:

$$\begin{aligned}xyz+xy+yz+zx &= (x+1)(y+1)(z+1)-(x+y+z)-1\\ &= pqr-13,\end{aligned}$$

donde p,q,r, son enteros positivos que suman 15 ($p=x+1$, $q=y+1$, $r=z+1$). Un análisis por casos muestra que pqr es máximo cuando $p=5$, $q=5$ y $r=5$. Por lo tanto, la respuesta es $5^3-13=112$.

Solución del problema 37. La respuesta es (a).
Ya que $1+2+\cdots+100=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$, tenemos que la suma de cualesquiera 100 enteros positivos consecutivos comenzando en $a+1$ es de la forma:

$$\begin{aligned}(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+100) &= 100a+(1+2+\cdots+100)\\ &= 100a+5050.\end{aligned}$$

Luego, dicha suma termina en 50. Por lo tanto, el único valor posible es (a), y es igual a la suma de 100 enteros positivos consecutivos comenzando con $16,273,800$.

Solución del problema 38. La respuesta es (a).
Elevando al cuadrado ambas expresiones y sumando los resultados obtenidos, tenemos que $9(\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A) + 16(\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B) + 24(\operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A) = 37$, es decir, $24 \operatorname{sen}(A + B) = 12$. Luego, $\operatorname{sen} C = \operatorname{sen}(180° - A - B) = \operatorname{sen}(A + B) = \frac{1}{2}$ de donde $\angle C = 30°$ o $\angle C = 150°$. Si $\angle C = 150°$, entonces $\angle A < 30°$ y por lo tanto $3 \operatorname{sen} A + 4 \cos B < 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 < 6$ que es una contradicción. Por lo tanto, $\angle C = 30°$.

Solución del problema 39. La respuesta es (e).
Para $n \geq 3$, tenemos que:

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}.$$

Luego, $(n-1)a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. Se sigue entonces que:

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n} = \frac{(n-1)a_n + a_n}{n} = a_n$$

para $n \geq 3$. Como $a_9 = 99$ y $a_1 = 19$, tenemos que $99 = a_3 = \frac{19+a_2}{2}$ y por lo tanto, $a_2 = 179$. (La secuencia es $19, 179, 99, 99, \ldots$.)

Solución del problema 40. La respuesta es (e).
Como la longitud de la circunferencia circunscrita al triángulo es $3+4+5 = 12$, los arcos correspondientes miden en grados $90°$, $120°$ y $150°$. Luego, el área del triángulo es:

$$\frac{1}{2}(r^2 \operatorname{sen} 90° + r^2 \operatorname{sen} 120° + r^2 \operatorname{sen} 150°) = \frac{\sqrt{3}+3}{4} r^2.$$

Por otra parte, $12 = 2\pi r$ de donde $r^2 = \frac{36}{\pi^2}$ y por lo tanto, el área buscada es $(\frac{\sqrt{3}+3}{4})(\frac{36}{\pi^2}) = \frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$.

Solución del problema 41. La respuesta es (c).
Ya que $E(100) = E(00)$, el resultado es el mismo que el de la suma $E(00) + E(01) + E(02) + E(03) + \cdots + E(99)$ que es el mismo que el de $E(00010203\ldots99)$. Como hay 200 dígitos y cada dígito aparece 20 veces, la suma de los dígitos pares es $20(0 + 2 + 4 + 6 + 8) = 20(20) = 400$.

Solución del problema 42. La respuesta es (b).
Despejando, tenemos que:

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots &= \frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots\right)\\
&= \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\right)\\
&= \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)\\
&= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

Solución del problema 43. La respuesta es (d).
Sea $BC = x$. Como el triángulo ABC es isósceles, o bien $AC = 2x$ o bien $AC = x$. Como $AB = 2x$ y se debe cumplir que $BC + AC > AB$, entonces necesariamente $AC = 2x$. Luego, $2x + 2x + x = 300$ de donde $x = 60$ cm, por lo que $AC = 2x = 120$ cm.

Solución del problema 44. La respuesta es (b).
Como k es impar, $f(k) = k+3$. Como $k+3$ es par, $f(f(k)) = f(k+3) = \frac{k+3}{2}$. Si $\frac{k+3}{2}$ es impar, entonces:

$$27 = f(f(f(k))) = f\left(\frac{k+3}{2}\right) = \frac{k+3}{2}+3,$$

de donde $k = 45$. Pero esto no es posible porque $f(f(f(45))) = f(f(48)) = f(24) = 12$. Por lo tanto, $\frac{k+3}{2}$ es par. Luego:

$$27 = f(f(f(k))) = f\left(\frac{k+3}{2}\right) = \frac{k+3}{4},$$

de donde $k = 105$. Verificando, tenemos que $f(f(f(105))) = f(f(108)) = f(54) = 27$. Por lo tanto, la suma de los dígitos de k es $1 + 0 + 5 = 6$.

Solución del problema 45. La respuesta es (b).
Sean a, b y c las dimensiones de la caja. Tenemos que:

$$140 = 4a + 4b + 4c \quad \text{y} \quad 21 = \sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

de donde $35 = a + b + c$ y $441 = a^2 + b^2 + c^2$. Luego:

$$\begin{aligned}
1225 &= (a+b+c)^2\\
&= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\\
&= 441+2ab+2bc+2ca.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de la caja es $2ab + 2bc + 2ca = 1225 - 441 = 784$.

Solución del problema 46. La respuesta es (b).
El número de enteros alcanzables de cinco dígitos que comienzan con 1 es $\binom{8}{4} = 70$, ya que los cuatro dígitos que están más a la derecha se deben elegir del conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y una vez que se han elegido, sólo hay una forma de ordenarlos de menor a mayor. De manera análoga, los siguientes $\binom{7}{4} = 35$ enteros de la lista comienzan con 2. Así que el número que ocupa el lugar 97 es el que ocupa el lugar 27 entre los que comienzan con 2. De entre los que comienzan con 2, hay $\binom{6}{3} = 20$ que comienzan con 23 y $\binom{5}{3} = 10$ que comienzan con 24. Por lo tanto, el que ocupa el lugar número 97 es el séptimo de los que comienzan con 24. Los primeros seis de los que comienzan con 24 son 24567, 24568, 24569, 24578, 24579, 24589, y el séptimo es 24678 que no contiene el dígito 5.

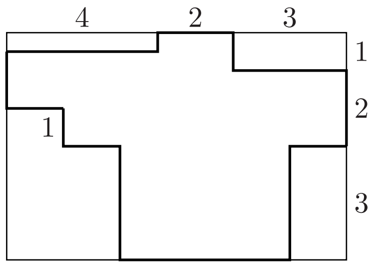
Segunda Solución. Como en la primera solución, notemos que hay 105 enteros en la lista que comienzan con 1 o con 2, de modo que el que ocupa el lugar 97 es el noveno contando a partir del final de la lista. Los últimos 8 números de la lista, comenzando con el último, son 26789, 25789, 25689, 25679, 25678, 24789, 24689, 24679, y el noveno es 24678.

Solución del problema 47. La respuesta es (e).
Sean a, b y c el número de -1's, 1's y 2's en la sucesión, respectivamente. No necesitamos considerar los ceros. Entonces, a, b y c son enteros no negativos tales que $-a+b+2c = 19$ y $a+b+4c = 99$. Luego, $a = 40-c$ y $b = 59-3c$, donde $0 \leq c \leq 19$ (ya que $b \geq 0$). Entonces:

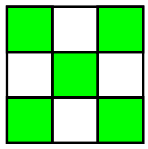
$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = -a + b + 8c = 19 + 6c.$$

El valor mínimo se alcanza cuando $c = 0$ ($a = 40$ y $b = 59$), y el valor máximo se alcanza cuando $c = 19$ ($a = 21$ y $b = 2$). Por lo tanto, $m = 19$ y $M = 133$, de donde $\frac{M}{m} = 7$.

Solución del problema 48. La respuesta es (d).
Si encerramos la figura en un rectángulo, podemos observar que el perímetro del rectángulo es exactamente igual al perímetro de la figura que teníamos, es decir, sus perímetros son iguales. Como el perímetro del rectángulo es $2(4+2+3+1+2+3) = 30$, el perímetro de la figura también es 30.

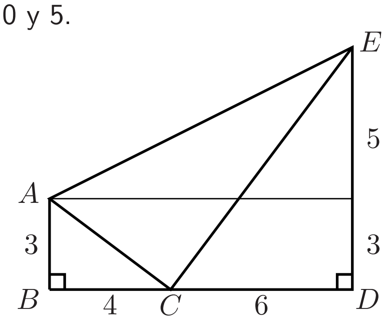


Solución del problema 49. La respuesta es (c).



Si coloreamos la cuadrícula como tablero de ajedrez, observamos que los números pares deben ir en las casillas blancas y los impares en las negras, ya que del 1 al 9 tenemos 5 números impares y 4 pares. Los pares se acomodan de $4! = 24$ formas, los impares de $5! = 120$ formas. Por lo tanto, en total hay $24 \times 120 = 2880$ formas de acomodar los números.

Solución del problema 50. La respuesta es (d).
Si dibujamos una recta paralela a BD que pase por A formamos un triángulo rectángulo de catetos 10 y 5.



Luego, la hipotenusa mide $\sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Solución del problema 51. La respuesta es (c).
Si los números en el primer renglón (de arriba hacia abajo) eran A, B, C y 2, los del segundo renglón x y y, y los del tercer renglón r y s, como se muestra en la figura,

$$\begin{array}{c}
\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{2}\\
\boxed{x}\boxed{8}\boxed{y}\\
\boxed{r}\boxed{s}\\
\boxed{33}
\end{array}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
A+B &= x\\
B+C &= 8\\
C+2 &= y\\
x+8 &= r\\
8+y &= s\\
r+s &= 33.
\end{aligned}$$

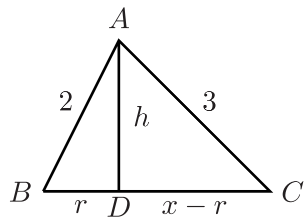
De las últimas tres ecuaciones tenemos que $x+y+16=r+s=33$, es decir, $x+y=17$. Si sumamos la primera y tercera ecuación, obtenemos que $A+B+C+2=x+y=17$, luego, $A+B+C=15$. Como $B+C=8$, por la segunda ecuación, tenemos que $A=7$.

Solución del problema 52. La respuesta es (b).
Primero vemos que $10000=2^4\cdot 5^4$, entonces tiene $5\times 5=25$ divisores positivos. Un divisor de 10000 que es múltiplo de 100 es de la forma $2^a\cdot 5^b$, con $2\leq a\leq 4$ y $2\leq b\leq 4$, es decir, tenemos en total 9 divisores de este tipo. Por lo tanto, hay $25-9=16$ divisores de 10000 que no son múltiplos de 100.

Solución del problema 53. La respuesta es (a).
En la primera fila deben ir exactamente tres números 1 y tres números -1. Cuando escribimos los números 1 la fila queda determinada y con ella también la fila de abajo (abajo de un 1 va un -1 y viceversa). Luego, sólo tenemos que elegir la posición de los números 1 en la primera fila, es decir, tenemos que elegir de 6 posiciones 3 de ellas. Por lo tanto, tenemos $\binom{6}{3}=20$ maneras distintas.

Solución del problema 54. La respuesta es (a).
Si un lado mide x y el área también mide x, tenemos que $\frac{x\cdot h}{2}=x$, donde h es

la altura desde el vértice opuesto al lado x. Despejando, tenemos que $h = 2$. Consideremos el siguiente triángulo.



Como el triángulo ABD es rectángulo tenemos que $r^2 + 2^2 = 2^2$, es decir, $r = 0$. Luego, tenemos un triángulo rectángulo donde $x = \sqrt{5}$.

Solución del problema 55. La respuesta es (e).
Como $AE = 2 = FA$ y el ángulo EFA es de $60°$, el triángulo AEF también es equilátero. Además, como D es el punto medio de AE, DF es bisectriz del ángulo EFA, es decir, $\angle DFE = 30°$.

Solución del problema 56. La respuesta es (d).
El número 100 es divisible entre:

$$\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20, \pm25, \pm50, \pm100.$$

Haciendo $2n - 1 = \pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20, \pm25, \pm50, \pm100$, tenemos que n es entero positivo sólo si $2n - 1 = 1, 5$ o 25. Luego, hay sólo tres números enteros.

Solución del problema 57. La respuesta es (e).
Denotemos con (XYZ) al área del triángulo XYZ. Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABD resulta que $AD = 4$. Como los triángulos BDA y ADC son semejantes, tenemos que:

$$\frac{(ADC)}{(BDA)} = \left(\frac{AD}{BD}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9},$$

de donde:

$$(ADC) = \frac{16(BDA)}{9} = \frac{16 \times 6}{9} = \frac{32}{3}.$$

Solución del problema 58. La respuesta es (a).
En módulo 9 todo entero positivo es congruente a la suma de sus dígitos. Así que

el número ganador será de la forma $9k+5$. Todas las opciones son de esta forma menos el 1272.

Solución del problema 59. La respuesta es (b).
Observemos sólo los últimos dígitos de cada operación. Al multiplicar 1 por 3 y sumarle 5 obtenemos 8, luego $3 \cdot 8 + 5 = 29$. Siguiendo así, el último dígito de la siguiente operación es 2, luego 1 nuevamente, es decir, que los últimos dígitos se repiten cada 4. Como 2004 es múltiplo de 4, el dígito de las unidades después de aplicar la operación 2004 veces es 1, después de 2005 veces es 8, de 2006 veces es 9 y la de 2007 veces es 2.

Solución del problema 60. La respuesta es (b).
Sumando las tres ecuaciones tenemos que $(x+y+z)^2 = 81$, de donde $x+y+z = 9$. Luego, $x = \frac{26}{9}$, $y = \frac{27}{9}$ y $z = \frac{28}{9}$.

Solución del problema 61. La respuesta es (a).
Veamos primero que con los tres colores a, b y c podemos colorear 6 renglones distintos:

a	b	c

a	c	b

b	a	c

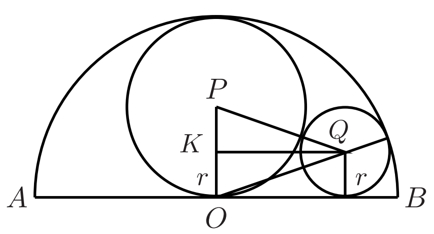
b	c	a

c	b	a

c	a	b

Tenemos que escoger tres de estos renglones de tal forma que en cada columna del tablero halla un cuadrito de cada color. El primer renglón lo podemos escoger de cualquiera de los 6 posibles y el segundo, sólo de 2, ya que los otros 3 comparten en una columna un mismo color que el primero que elegimos. La elección del tercer renglón queda determinada. Por lo tanto, hay 12 formas de colorear el tablero.

Solución del problema 62. La respuesta es (e).
Sea r el radio del círculo con centro en Q.



Aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos PKQ y OKQ, tenemos que:

$$\begin{aligned} PK^2 + KQ^2 &= PQ^2, \\ OK^2 + KQ^2 &= OQ^2, \end{aligned}$$

de donde $OK^2 - OQ^2 = PK^2 - PQ^2$. Como $OK = r$, $OQ = 1 - r$, $PK = \frac{1}{2} - r$ y $PQ = \frac{1}{2} + r$, tenemos que:

$$r^2 - (1-r)^2 = \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + r\right)^2,$$

de donde se sigue que $r = \frac{1}{4}$.

Solución del problema 63. La respuesta es (e).
Los números que se escriben con exactamente dos unos son: los números de la forma $11a$ donde a es cualquier dígito distinto del 1, los cuales suman $(99 \times 10) + 44 = 1034$; los números de la forma $b11$ con $b \neq 1$ los cuales suman $(44 \times 100) + 99 = 4499$; los números de la forma $1c1$ con $c \neq 1$ los cuales suman $(9 \times 100) + (44 \times 10) + 9 = 1349$. Por lo tanto, la suma de todos estos números es $1034 + 4499 + 1349 = 6882$.

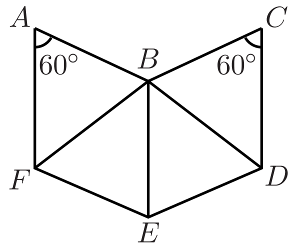
Solución del problema 64. La respuesta es (d).
Reescribiendo la ecuación, tenemos que $500a + 500b = ab$. Sumando 500^2 en ambos lados, tenemos:

$$\begin{aligned} ab - 500a - 500b + 500^2 &= 500^2 \\ a(b - 500) - 500(b - 500) &= 500^2 \\ (a - 500)(b - 500) &= 500^2. \end{aligned}$$

Si hacemos $x = a - 500$, $y = b - 500$, la ecuación queda como $xy = 500^2$. Como $a = x + 500 > 0$ y $b = y + 500 > 0$, entonces $x > -500$, $y > -500$. Si $-500 < x < 0$ y $-500 < y < 0$, entonces $xy < 500^2$ lo cual no es posible. Luego, $x > 0$, $y > 0$. Por lo tanto, el número de soluciones de la ecuación es el número de divisores positivos de 500^2. Descomponiendo 500 en factores primos, tenemos que $500^2 = (2^2 \cdot 5^3)^2 = 2^4 \cdot 5^6$, es decir, el número de divisores positivos de 500^2 es $(4+1)(6+1) = 35$.

Solución del problema 65. La respuesta es (c).
Si Enrique tiene 5 hermanos, entonces Enriqueta tiene 6 hermanos. Es decir, $z = 6$. Como Enrique tiene 3 hermanas y una es Enriqueta, entonces Enriqueta tiene 2 hermanas. Es decir, $y = 2$. Por lo tanto, $yz = 2 \times 6 = 12$.

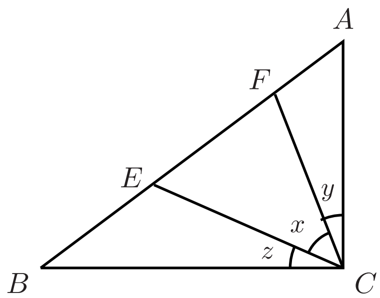
Solución del problema 66. La respuesta es (d).
Si trazamos BF, BE y BD, formamos cuatro triángulos equiláteros de lado 1.



Por ejemplo, el triángulo FAB es equilátero porque $AF = AB = 1$ y $\angle FAB = 60°$. Por lo tanto, el área de toda la figura es $4(\frac{\sqrt{3}/2}{2}) = \sqrt{3}$.

Solución del problema 67. La respuesta es (a).
Sean $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{15}$ dichos enteros. Entonces, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{13} \geq 1 + 2 + \cdots + 13 = 91$ y como $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{15}}{15} = 13$, tenemos que $x_{14} + x_{15} \leq 13(15) - 91 = 104$. Como $x_{14} < x_{15}$, se sigue que $x_{14} \leq 51$. Tomando $x_1 = 1$, $x_2 = 2, \ldots, x_{13} = 13$, $x_{14} = 51$ y $x_{15} = 53$, concluimos que el valor máximo de x_{14} es 51.

Solución del problema 68. La respuesta es (c).
Sean $\angle ECF = x$, $\angle ACF = y$ y $\angle BCE = z$.



Entonces $x + y + z = 90°$. Como $AC = AE$, tenemos que $\angle AEC = \angle ACE = x + y$. Análogamente, $\angle EFC = \angle BCF = x + z$. Luego, en el triángulo CEF tenemos que $x + (x + y) + (x + z) = 180°$, es decir, $2x + 90° = 180°$. Por lo tanto, $x = 45°$.

Solución del problema 69. La respuesta es (a).
Si $\overline{ab}$ denota un entero positivo de dos dígitos, donde su primer dígito es a y su segundo dígito es b, entonces:

$$\overline{ab} - (a \times b) = 10a + b - (a \times b) = a(10 - b) + b > 0,$$

ya que $a > 0$ y $0 \leq b < 10$. Por lo tanto, $\overline{ab} > a \times b$.

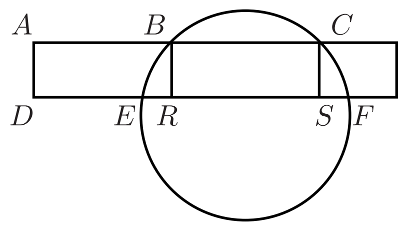
Solución del problema 70. La respuesta es (e).
Agrupando y factorizando, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(2007^2 - 2006^2) &= (2007-2006)(2007+2006) = 2007+2006,\\
(2005^2 - 2004^2) &= (2005-2004)(2005+2004) = 2005+2004,\\
&\vdots\\
(3^2 - 2^2) &= (3-2)(3+2) = 3+2.
\end{aligned}$$

Entonces, lo que queremos calcular es igual a:

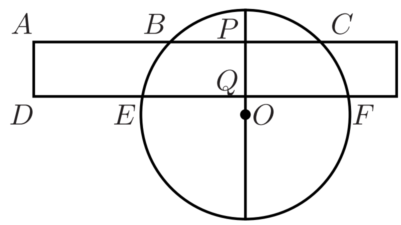
$$2+3+\cdots+2007 = (1+2+\cdots+2007)-1 = \frac{1}{2}(2007)(2008)-1 = 1004(2007)-1.$$

Solución del problema 71. La respuesta es (b).
Si trazamos las perpendiculares BR y CS como se muestra en la figura, formamos los rectángulos $BCSR$ y $ABRD$.



Entonces, $ER = 1$ y por simetría $SF = 1$. Luego, $RS = BC = 5$ y por lo tanto $EF = ER + RS + SF = 1 + 5 + 1 = 7$.

Segunda Solución. Tracemos la mediatriz de la cuerda EF. Esta mediatriz pasa por el centro O del círculo.



Como PO también es perpendicular a la cuerda BC, entonces PO corta a BC en su punto medio. Luego, al ser PQ y AD paralelas, tenemos que $DQ = AP = 4+\frac{5}{2} = \frac{13}{2}$ y por lo tanto $EF = 2EQ = 2(DQ-DE) = 2(\frac{13}{2}-3) = 7$.

Solución del problema 72. La respuesta es (b).
Para evitar que se tengan dos clavijas amarillas en la misma fila o columna, debe haber exactamente una clavija amarilla en cada fila y en cada columna. Luego, comenzando por la parte superior del arreglo, la clavija en la primera fila debe ser amarilla, la segunda clavija de la segunda fila debe ser amarilla, la tercera clavija de la tercera fila debe ser amarilla, etc. Para evitar que se tengan dos clavijas rojas en alguna fila, debe haber una clavija roja en cada una de las filas 2, 3, 4 y 5. Las clavijas rojas deben estar en la primera posición en la segunda fila, en la segunda posición en la tercera fila, etc. Continuando de esta manera llegamos a que hay un solo arreglo que cumple las condiciones del problema, como se muestra en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{lllll} a & & & & \\ r & a & & & \\ v & r & a & & \\ az & v & r & a & \\ an & az & v & r & a \end{array}$$

Solución del problema 73. La respuesta es (c).
Como $n^3 - 8n^2 + 20n - 13 = (n-1)(n^2 - 7n + 13)$, uno de los factores debe ser 1 y el otro debe ser un número primo. Si $n - 1 = 1$, entonces $n = 2$ y $n^2 - 7n + 13 = 2^2 - 7(2) + 13 = 3$ que es primo. Luego, $n = 2$ es solución. Ahora, si $n^2-7n+13 = 1$, entonces $n^2-7n+12 = (n-4)(n-3) = 0$ de modo que $n = 4$ o $n = 3$. Si $n = 4$, entonces $n-1 = 3$ y si $n = 3$, entonces $n-1 = 2$, es decir $n - 1$ es primo en ambos casos. Por lo tanto, $n^3 - 8n^2 + 20n - 13$ es un número primo para $n = 2$, 3 y 4.

Solución del problema 74. La respuesta es (e).
Multiplicando ambos lados de la igualdad por $b(b+10a)$ obtenemos $2ab+10a^2+10b^2 = 2b^2 + 20ab$, de donde $5a^2 - 9ab + 4b^2 = 0$. Factorizando, tenemos que $(a - b)(5a - 4b) = 0$. Como $a \neq b$, entonces $5a - 4b = 0$ y por lo tanto $\frac{a}{b} = \frac{4}{5} = 0.8$.

Solución del problema 75. La respuesta es (e).
Tenemos $\binom{4}{2} = 6$ maneras de pintar dos casillas negras en el primer renglón.

Dividimos en casos.
1. *Las casillas negras del segundo renglón están en las mismas columnas que las casillas negras del primer renglón*. En este caso, una vez pintadas las casillas del primer renglón, las casillas del segundo renglón quedan fijas y sólo hay una manera de pintar las casillas de los últimos dos renglones. Ejemplo:

$*$	$*$		
$*$	$*$		
		$*$	$*$
		$*$	$*$

2. *Ambas casillas negras del segundo renglón están en distintas columnas que las casillas negras del primer renglón*. En este caso, una vez pintadas las casillas del primer renglón hay una única manera de pintar las casillas negras del segundo renglón. Tenemos entonces $\binom{4}{2} = 6$ maneras de pintar las casillas del tercer renglón, y el cuarto renglón queda determinado. Ejemplo:

$*$	$*$		
		$*$	$*$
$*$		$*$	
	$*$		$*$

3. *Exactamente una casilla negra del segundo renglón está en la misma columna que una casilla negra del primer renglón*. En este caso, al pintar el segundo renglón hay dos maneras de elegir la columna común con una casilla pintada del primer renglón, y hay dos maneras más de pintar la casilla restante. Es decir, hay cuatro maneras de pintar el segundo renglón. Independientemente de cómo se hayan pintado los primeros dos renglones, hay 2 maneras de pintar el tercer renglón y el cuarto renglón queda determinado. Luego, en este caso hay $4 \times 2 = 8$ posibilidades. Ejemplo:

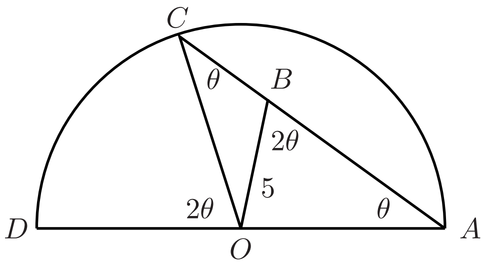
$*$	$*$		
	$*$		$*$
$*$		$*$	
		$*$	$*$

Como en cada caso hay 6 maneras de pintar las casillas del primer renglón, en total hay $6(1 + 6 + 8) = 90$ coloraciones posibles.

Solución del problema 76. La respuesta es (a).
Observemos que:

$$\begin{aligned} 27^7 + 84^7 + 110^7 + 133^7 &= 27^2 \cdot 27^5 + 84^2 \cdot 84^5 + 110^2 \cdot 110^5 + 133^2 \cdot 133^5 \\ &< 133^2(27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5) \\ &= 133^2(144^5) \\ &< 144^2(144^5) - 1 \\ &= 144^7 - 1. \end{aligned}$$

Solución del problema 77. La respuesta es (d).
Consideremos la mitad del círculo. Sea $2\theta = 60° = \angle ABO = \widehat{CD}$. Entonces, $\angle CAD = \theta$ por ser un ángulo inscrito que subtiende el arco 2θ. Como el triángulo COA es isósceles (porque $OA = OC$), tenemos que $\angle ACO = \theta$. Como 2θ es un ángulo exterior del triángulo BOC, tenemos que $2\theta = \angle ACO + \angle BOC = \theta + \angle BOC$ y de aquí $\angle BOC = 2\theta - \theta = \theta$. Por lo tanto, el triángulo BOC es isósceles y en consecuencia $BC = 5$.



Solución del problema 78. La respuesta es (c).
Tenemos que $f(-7) = p(-7)^7 + q(-7)^3 + r(-7) - 4 = 3$. Luego, $-p(7)^7 - q(7)^3 - r(7) - 4 = 3$, de modo que $p(7)^7 + q(7)^3 + r(7) + 4 = -3$. Por lo tanto, $f(7) = p(7)^7 + q(7)^3 + r(7) - 4 = -3 - 8 = -11$.

Solución del problema 79. La respuesta es (b).
Tenemos que:

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} = \frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} &= \frac{c-a}{c+a}\left(1+\frac{(a-b)(b-c)}{(a+b)(b+c)}\right)\\
&= \frac{c-a}{c+a}\left(\frac{2b(c+a)}{(a+b)(b+c)}\right)\\
&= \frac{2b(c-a)}{(a+b)(b+c)}\\
&= -\frac{2b(a-c)}{(a+b)(b+c)}.
\end{aligned}$$

Luego, la expresión original es igual a 0.

Solución del problema 80. La respuesta es (c).
Como la progresión S_k es $1, 1+k, 1+2k, \ldots, 1+(n-1)k, \ldots$ queremos ver para cuántos valores de k, se tiene que $1+(n-1)k = 2008$ para algún entero positivo n. Entonces, $(n-1)k = 2007 = 3^2 \cdot 223$ de modo que k debe ser divisor de $3^2 \cdot 223$. Los divisores de $3^2 \cdot 223$ son 1, 3, 9, 223, 669 y 2007, y para cada uno de ellos podemos calcular el valor de n. Luego, la respuesta es 6.

Solución del problema 81. La respuesta es (b).
Tenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\ \frac{1}{\sqrt[4]{5}+1}=\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt{5}-1},\ \frac{1}{\sqrt[8]{5}+1}=\frac{\sqrt[8]{5}-1}{\sqrt[4]{5}-1},\ \frac{1}{\sqrt[16]{5}+1}=\frac{\sqrt[16]{5}-1}{\sqrt[8]{5}-1}.$$

Entonces:

$$x = 4\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt{5}-1}\right)\left(\frac{\sqrt[8]{5}-1}{\sqrt[4]{5}-1}\right)\left(\frac{\sqrt[16]{5}-1}{\sqrt[8]{5}-1}\right) = \sqrt[16]{5}-1.$$

Por lo tanto, $(x+1)^{48} = (\sqrt[16]{5})^{48} = 5^{48/16} = 5^3 = 125$.

Solución del problema 82. La respuesta es (a).
Es fácil ver que $\tau(n)$ es impar si y sólo si n es un cuadrado perfecto (¿por qué?). Como el mayor cuadrado perfecto que es menor que 2008 es 44^2, tenemos que $\tau(1^2), \tau(2^2), \ldots, \tau(44^2)$ son todos impares. Luego, $S(1^2)$, $S(3^2)$, $S(5^2), \ldots, S(43^2)$ son impares y $S(2^2), S(4^2), \ldots, S(44^2)$ son pares, y por lo tanto para cada entero $k = 1, 3, 5, \ldots, 43$, $S(n)$ es impar si $k^2 \leq n < (k+1)^2$

y $S(n)$ es par si $(k+1)^2 \leq n < (k+2)^2$. Luego, tenemos:

$$\begin{aligned} & (2^2-1^2)+(4^2-3^2)+\cdots+(44^2-43^2) \\ = \;& (2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+\cdots+(44-43)(44+43) \\ = \;& 1+2+3+4+\cdots+43+44 \\ = \;& \frac{1}{2}(45)(44)=990 \end{aligned}$$

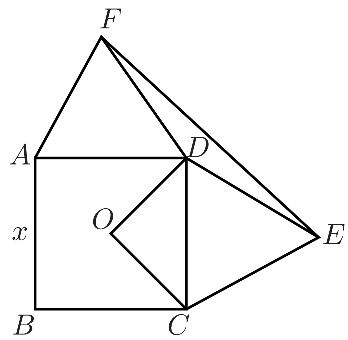
enteros n menores que 2008 tales que $S(n)$ es impar, y:

$$\begin{aligned} & (3^2-2^2)+(5^2-4^2)+\cdots+(43^2-42^2) \\ = \;& (3-2)(3+2)+(5-4)(5+4)+\cdots+(43-42)(43+42) \\ = \;& 2+3+4+5+\cdots+42+43 \\ = \;& \frac{1}{2}(45)(42)=945 \end{aligned}$$

enteros n menores que $44^2=1936$ tales que $S(n)$ es par. Como todos los enteros entre 44^2 y 45^2 son tales que $S(n)$ es par, entonces los 73 enteros $1936, 1937, \ldots, 2008$ cumplen que $S(n)$ es par. Luego, en total hay $945+73=1018$ enteros menores o iguales que 2008 con $S(n)$ par. Por lo tanto, $a=990$ y $b=1018$, de donde $|a-b|=|990-1018|=|-28|=28$.

Solución del problema 83. La respuesta es (b).
El ciclista recorre dos tercios del camino en bicicleta y un tercio a pie, es decir, hace la mitad de lo que recorrió en bicicleta en el doble de tiempo. Por lo tanto, anda en bicicleta cuatro veces más rápido que a pie.

Solución del problema 84. La respuesta es (b).
Sea x la medida del lado del cuadrado.



El área del triángulo DOC es $\frac{x(\frac{x}{2})}{2} = \frac{x^2}{4}$. Por otra parte, tenemos que $\angle FDE = 360° - \angle FDA - \angle ADC - \angle EDC = 360° - 60° - 90° - 60° = 150°$. Además, $x = AD = DF = DE$ de modo que el triángulo FDE es isósceles donde los lados congruentes miden x. Luego, el área del triángulo FDE es igual a $\frac{x \cdot x \cdot \operatorname{sen} 150°}{2}$. Pero $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen}(180° - 150°) = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, el área del triángulo FDE es igual a $\frac{x^2 \operatorname{sen} 30°}{2} = \frac{x^2}{4}$, es decir, las áreas de los triángulos DOC y FDE son iguales. Luego, la respuesta es 1.

Solución del problema 85. La respuesta es (b).
El conjunto $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ tiene 1000 números y sabemos que la probabilidad de que un número x escogido al azar, sea un divisor de M es igual a $\frac{1}{100}$, entonces M tiene que tener 10 divisores entre 1 y 1000. Entonces M es de la forma p^9 con p un número primo, o de la forma p^4q con p y q primos distintos. Si $M = p^9$, como $M \leq 1000$, entonces $p = 2$ y $M = 512$ en este caso. Si $M = p^4q$, como $M \leq 1000$ y $5^4 = 625$ entonces $p = 2$ o $p = 3$. Si $p = 2$, entonces el número primo más grande q para el cual $M \leq 1000$ es 61, de donde $M = 16 \times 61 = 976$. Si $p = 3$, entonces el número primo más grande q para el cual $M \leq 1000$ es 11, de donde $M = 81 \times 11 = 891$. Por lo tanto, el mayor valor posible de M es 976.

Solución del problema 86. La respuesta es (a).
Como a, b y c son soluciones de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$, entonces $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$, de donde:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 6 \\ ab+ac+bc &= 5 \\ abc &= 1. \end{aligned}$$

Pero también tenemos que:

$$\begin{aligned} a^3 - 6a^2 + 5a - 1 &= 0 \\ b^3 - 6b^2 + 5b - 1 &= 0 \\ c^3 - 6c^2 + 5c - 1 &= 0, \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} a^3 &= 6a^2 - 5a + 1 && (1) \\ b^3 &= 6b^2 - 5b + 1 && (2) \\ c^3 &= 6c^2 - 5c + 1. && (3) \end{aligned}$$

Sumando las tres ecuaciones tenemos que:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= 6a^2+6b^2+6c^2-5a-5b-5c+3 \\ &= 6(a^2+b^2+c^2)-5(a+b+c)+3. \end{aligned}$$

Como $a+b+c=6$, si conociéramos el valor de $a^2+b^2+c^2$, conoceríamos el valor de $a^3+b^3+c^3$. Como:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \\ 6^2 &= a^2+b^2+c^2+2(5) \\ a^2+b^2+c^2 &= 26, \end{aligned}$$

se sigue que $a^3+b^3+c^3=6(26)-5(6)+3=129$.
Por otra parte, si multiplicamos cada término de la ecuación (1) por a, cada término de la ecuación (2) por b y cada término de la ecuación (3) por c, obtenemos:

$$\begin{aligned} a^4 &= 6a^3-5a^2+a && (4) \\ b^4 &= 6b^3-5b^2+b && (5) \\ c^4 &= 6c^3-5c^2+c. && (6) \end{aligned}$$

Sumando término a término, tenemos que:

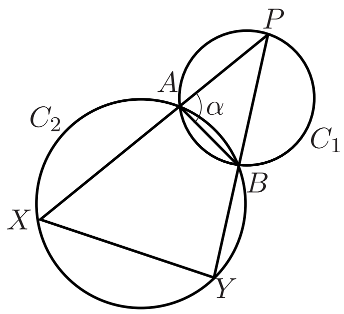
$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= 6(a^3+b^3+c^3)-5(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c) \\ &= 6(129)-5(26)+6 \\ &= 650. \end{aligned}$$

Ahora repetimos el procedimiento multiplicando cada término de la ecuación (4) por a, de la ecuación (5) por b y de la ecuación (6) por c, y obtenemos:

$$\begin{aligned} a^5+b^5+c^5 &= 6(a^4+b^4+c^4)-5(a^3+b^3+c^3)+(a^2+b^2+c^2) \\ &= 6(650)-5(129)+26 \\ &= 3281. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a^5+b^5+c^5=3281$.

Solución del problema 87. La respuesta es (d).
Sea $\angle PAB=\alpha$. Entonces $\angle XAB=180^\circ-\alpha$.



Como el cuadrilátero $AXYB$ es cíclico, tenemos que $\angle XYB = \alpha$. Los triángulos PAB y PYX son semejantes pues tienen dos ángulos iguales. Luego, $\frac{XY}{BA} = \frac{PX}{PB}$, de donde $XY = \frac{BA \cdot PX}{PB} = \frac{4(5+16)}{7} = 12$.

Solución del problema 88. La respuesta es (e).
Sea x el número de fichas rojas. Entonces, tenemos que $\frac{x}{x+8} = \frac{2}{3}$, de donde $x = 16$. Por lo tanto, hay $16 + 8 = 24$ fichas en la bolsa.

Solución del problema 89. La respuesta es (d).
Si elevamos al cuadrado cada expresión y después sumamos las expresiones obtenidas, tenemos que:

$$(\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a) + (\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b) + 2(\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) = 2.$$

Como $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ y $\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b = 1$, entonces:

$$\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = 0,$$

es decir, $\cos(a - b) = 0$.
Por otro lado:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} &= (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)(\cos a + \cos b) \\ &= (\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a) + (\operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} b \cos b) \end{aligned}$$

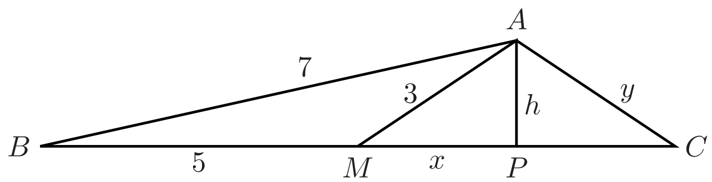
es decir:

$$\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a + b)\cos(a - b) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $\cos(a - b) = 0$, se sigue que $\operatorname{sen}(a + b) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solución del problema 90. La respuesta es (c).
Factorizando tenemos que $2008 = 2^3 \times 251$. Para que un número sea cuadrado perfecto y divida a 2008^{2008} es necesario que sea de la forma $2^a \times 251^b$, donde a y b son enteros pares no negativos, con $a \leq 3 \cdot 2008$ y $b \leq 2008$. Como hay 1005 números pares entre 0 y 2008 (inclusive), b tiene 1005 valores posibles. Para a tenemos $\frac{3\cdot 2008}{2} + 1 = 3013$ valores posibles entre 0 y 6024. Por lo tanto, hay 1005×3013 divisores de 2008^{2008} que son cuadrados perfectos.

Solución del problema 91. La respuesta es (b).
Sea P el pie de la perpendicular desde A sobre BC. Sean $x = MP$, $h = PA$ y $y = AC$. Tenemos que el ángulo AMB es obtuso ya que $7^2 > 3^2 + 5^2$. Entonces, P está entre M y C.



Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo APM tenemos que $h^2 = 3^2 - x^2$. Luego, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo APB, tenemos que:

$$\begin{aligned} 7^2 &= (5+x)^2 + h^2 \\ &= 25 + 10x + x^2 + 9 - x^2 \\ &= 34 + 10x, \end{aligned}$$

de donde $x = \frac{3}{2}$. Finalmente, en el triángulo rectángulo APC tenemos que:

$$\begin{aligned} y^2 &= (6-x)^2 + h^2 \\ &= 36 - 12x + x^2 + 9 - x^2 \\ &= 45 - 12x = 45 - 18 \\ &= 27. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Solución del problema 92. La respuesta es (e).
Sea $P(x,y,z) = (x+y+z)^{2008} + (x-y-z)^{2008}$. Claramente, $P(x,y,z) = (x+(y+z))^{2008} + (x-(y+z))^{2008}$. Luego, por el teorema del binomio tenemos

que:

$$\begin{aligned}
P(x,y,z) &= \sum_{k=0}^{2008}\binom{2008}{k}x^k(y+z)^{2008-k}+\sum_{k=0}^{2008}(-1)^k\binom{2008}{k}x^k(y+z)^{2008-k}\\
&= 2\left(\binom{2008}{0}(y+z)^{2008}+\binom{2008}{2}x^2(y+z)^{2006}+\cdots+\binom{2008}{2008}x^{2008}\right).
\end{aligned}$$

Como cada uno de los sumandos de $P(x,y,z)$ está multiplicado por una potencia distinta de x, basta contar cuántos términos hay en $(y+z)^{2008}, (y+z)^{2006}, \ldots, (y+z)^0$. Nuevamente por el teorema del binomio, se sigue que en $(y+z)^i$ hay $i+1$ términos. Por lo tanto, en $P(x,y,z)$ hay:

$$2009+2007+\cdots+1=1005^2$$

términos.

Solución del problema 93. La respuesta es (b).
Si dividimos $P(x)$ entre el polinomio $(x-17)(x-24)$ que tiene grado 2, entonces por el algoritmo de la división existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que $P(x)=(x-17)(x-24)q(x)+r(x)$ donde $r(x)$ tiene grado menor que 2. Sea $r(x)=ax+b$. Ya que $P(17)=10$ y $P(24)=17$, tenemos que $r(17)=17a+b=10$ y $r(24)=24a+b=17$, de donde $a=1$ y $b=-7$. Luego, $P(x)=(x-17)(x-24)q(x)+x-7$. Ahora, si $P(x)=x+3$ tenemos que $(x-17)(x-24)q(x)+x-7=x+3$. Como esta ecuación tiene en total dos soluciones distintas, $q(x)$ debe ser una constante. Supongamos que $q(x)=c$. Notemos además que c debe ser entero, ya que $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros. Entonces, $c(x-17)(x-24)-10=0$ o bien $x^2-41x+17(24)-\frac{10}{c}=0$. Usando la fórmula para resolver una ecuación cuadrática, encontramos que $x=\frac{41\pm\sqrt{49+\frac{40}{c}}}{2}$. Como estas soluciones deben ser enteros, entonces $\frac{40}{c}$ debe ser un entero y $49+\frac{40}{c}$ debe ser el cuadrado de un entero. Como los divisores de 40 son $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,\pm5,\pm10,\pm20,\pm40$, es fácil verificar que el único que cumple que $49+\frac{40}{c}$ es el cuadrado de un entero es $c=-1$. Por lo tanto, las soluciones de $P(x)=x+3$ son $\frac{41+3}{2}=22$ y $\frac{41-3}{2}=19$. Luego, la respuesta es $22\times19=418$.

Solución del problema 94. La respuesta es (b).
Ya que $\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\operatorname{sen}^4 x+4\cos^2 x}-\sqrt{\cos^4 x+4\operatorname{sen}^2 x} &= \sqrt{\operatorname{sen}^4 x-4\operatorname{sen}^2 x+4}\\
&\quad -\sqrt{\cos^4 x-4\cos^2 x+4}\\
&= \sqrt{(\operatorname{sen}^2 x-2)^2}-\sqrt{(\cos^2 x-2)^2}\\
&= \left|\operatorname{sen}^2 x-2\right|-\left|\cos^2 x-2\right|.
\end{aligned}$$

Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ y $-1 \leq \cos x \leq 1$, tenemos que $0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1$ y $0 \leq \cos^2 x \leq 1$. Entonces, $|\operatorname{sen}^2 x - 2| = 2 - \operatorname{sen}^2 x$ y $|\cos^2 x - 2| = 2 - \cos^2 x$, de modo que:

$$\begin{aligned} \left|\operatorname{sen}^2 x - 2\right| - \left|\cos^2 x - 2\right| &= 2 - \operatorname{sen}^2 x - (2 - \cos^2 x) \\ &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= \cos 2x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{\operatorname{sen}^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\operatorname{sen}^2 x} = \cos 2x$.

Solución del problema 95. La respuesta es (a).
Tenemos que:

$$\begin{aligned} \log_2(\log_3(\log_5(\log_7 N))) = 11 &\Leftrightarrow \log_3(\log_5(\log_7 N)) = 2^{11} \\ &\Leftrightarrow \log_5(\log_7 N) = 3^{2^{11}} \\ &\Leftrightarrow \log_7 N = 5^{3^{2^{11}}} \\ &\Leftrightarrow N = 7^x, \end{aligned}$$

donde $x = 5^{3^{2^{11}}}$. De aquí que el único divisor primo de N es 7.

Solución del problema 96. La respuesta es (c).
En total tenemos $\binom{26}{2} = 325$ rectas que unen vértices de P. De estas rectas, algunas son aristas, otras son diagonales de cuadriláteros y otras son diagonales espaciales. Como cada cuadrilátero tiene 2 diagonales, tenemos $12(2) = 24$ diagonales de cuadriláteros. Por lo tanto, el número de diagonales espaciales de P es $325 - 60 - 24 = 241$.

Solución del problema 97. La respuesta es (b).
Tenemos que:

$$\sqrt{104\sqrt{6} + 468\sqrt{10} + 144\sqrt{15} + 2008} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}.$$

Elevando ambos lados al cuadrado, obtenemos:

$$104\sqrt{6}+468\sqrt{10}+144\sqrt{15}+2008 = 2a^2+3b^2+5c^2+2ab\sqrt{6}+2ac\sqrt{10}+2bc\sqrt{15},$$

es decir:

$$(104 - 2ab)\sqrt{6} + (468 - 2ac)\sqrt{10} + (144 - 2bc)\sqrt{15} = 2a^2 + 3b^2 + 5c^2 - 2008.$$

Como $2a^2+3b^2+5c^2-2008$ es un número entero y $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$ son irracionales, la única posibilidad es que $104-2ab=0$, $468-2ac=0$ y $144-2bc=0$. Entonces, $ab=52=2^2\cdot 13$, $ac=234=2\cdot 3^2\cdot 13$ y $bc=72=2^3\cdot 3^2$, de modo que $(ab)(ac)(bc)=a^2b^2c^2=2^6\cdot 3^4\cdot 13^2$ y por lo tanto $abc=2^3\cdot 3^2\cdot 13=936$.

Solución del problema 98. La respuesta es (a).
Notemos que cada una de las expresiones tiene la forma $a=\sqrt{b^2-d^2}+\sqrt{c^2-d^2}$. Elevando al cuadrado cada lado de la expresión $\sqrt{b^2-d^2}=a-\sqrt{c^2-d^2}$, tenemos que $b^2-d^2=a^2-2a\sqrt{c^2-d^2}+c^2-d^2$. Es decir, $2a\sqrt{c^2-d^2}=a^2+c^2-b^2$. Elevando nuevamente al cuadrado y simplificando, tenemos que $a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-4a^2d^2$. Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned}
x^4+y^4+z^4 &= 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-4x^2\left(\frac{1}{16}\right),\\
y^4+z^4+x^4 &= 2y^2z^2+2y^2x^2+2z^2x^2-4y^2\left(\frac{1}{25}\right),\\
z^4+x^4+y^4 &= 2z^2x^2+2z^2y^2+2x^2y^2-4z^2\left(\frac{1}{36}\right).
\end{aligned}$$

De estas igualdades se sigue que $\frac{4x^2}{16}=\frac{4y^2}{25}=\frac{4z^2}{36}$, de modo que $x=\frac{4y}{5}$ y $z=\frac{6y}{5}$. Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación del sistema anterior y simplificando, obtenemos que:

$$\frac{256y^4+625y^4+1296y^4}{625}=\frac{800y^4}{625}+\frac{1800y^4}{625}+\frac{1152y^4}{625}-\frac{100y^2}{625},$$

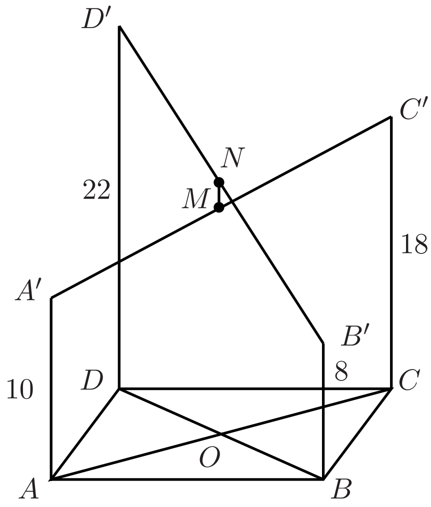
y de aquí tenemos que $1575y^4=100y^2$. Como $y\neq 0$ (si $y=0$, entonces x no sería un número real), dividiendo entre y^2 queda $y^2=\frac{4}{63}$ y por lo tanto $y=\frac{2}{3\sqrt{7}}$. Luego, $x+y+z=\frac{8}{15\sqrt{7}}+\frac{2}{3\sqrt{7}}+\frac{12}{15\sqrt{7}}=\frac{30}{15\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$. Como 7 no es divisible entre el cuadrado de ningún número primo, la respuesta es $2+7=9$.

Solución del problema 99. La respuesta es (b).
Sea O el punto de intersección de AC y BD. Entonces, O es el punto medio de AC y BD, de modo que OM y ON son las líneas medias de los trapecios $ACC'A'$ y $BDD'B'$, respectivamente. Luego:

$$OM=\frac{10+18}{2}=14 \quad \text{y} \quad ON=\frac{8+22}{2}=15.$$

Como OM y AA' son paralelas, ON y BB' son parelelas, y AA' y BB' son paralelas, se sigue que los puntos O, M y N son colineales. Por lo tanto:

$$MN=|OM-ON|=|14-15|=1.$$



Nota. En general, si $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$ y $DD' = d$, entonces $MN = \frac{1}{2}|a - b + c - d|$.

Solución del problema 100. La respuesta es (d).
Sea $m + n = s$. Entonces, $m^3 + n^3 + 3mn(m + n) = s^3$. Restando la ecuación del problema de esta igualdad, tenemos que $s^3 - 33^3 = 3mns - 99mn$, de donde $(s - 33)(s^2 + 33s + 33^2 - 3mn) = 0$. Luego, $s = 33$ o $(m + n)^2 + 33(m + n) + 33^2 - 3mn = 0$. La segunda ecuación es equivalente a $(m - n)^2 + (m + 33)^2 + (n + 33)^2 = 0$ cuya única solución $m = n = -33$ cumple el problema. Por otra parte, las soluciones de $m + n = 33$ que satisfacen el problema son $(0, 33)$, $(1, 32)$, $(2, 31), \ldots, (33, 0)$, de las cuales hay 34. Por lo tanto, hay 35 soluciones en total.

Apéndice

Definición 1 (Divisor) *Un entero $a \neq 0$ es divisor del entero b, si existe un entero c tal que $b = a \cdot c$. Se denota esto por $a|b$. También se dice que a divide a b, o que b es divisible entre a, o que b es múltiplo de a.*

Definición 2 (Número primo y número compuesto) *Un entero $p > 1$ es un número primo si los únicos divisores positivos de p son 1 y p. Un entero $n > 1$ que no es primo, se dice que es compuesto. Por ejemplo, 2 y 3 son números primos y 6 es compuesto.*

Definición 3 (Máximo Común Divisor) *Un entero $d \geq 1$ es el máximo común divisor de los enteros a y b si:*
(1) $d|a$ y $d|b$,
(2) si $c|a$ y $c|b$, entonces $c|d$.
Se denota por (a, b). Si $(a, b) = 1$, se dice que a y b son primos relativos o primos entre sí.

Definición 4 (Mínimo Común Múltiplo) *Un entero $m \geq 1$ es el mínimo común múltiplo de los enteros a y b si:*
(1) $a|m$ y $b|m$,
(2) si $a|c$ y $b|c$, entonces $m|c$.
Se denota por $[a, b]$.

Teorema 5 (Teorema Fundamental de la Aritmética) *Todo entero es producto de primos. Su descomposición como producto de primos es única salvo por el orden de los factores primos.*

Teorema 6 (Algoritmo de la división) *Para a y b enteros, con $b \neq 0$, existen enteros únicos q y r tales que $a = bq + r$ y $0 \leq r < |b|$.*
El número r se llama el "residuo" que deja a al dividirlo entre b.

Teorema 7 (Algoritmo de Euclides) *Es un proceso para encontrar el máximo común divisor de dos enteros positivos a y b. Utiliza el algoritmo de la división como sigue:*

$$\begin{array}{rcll} a & = & n_0 b + r_1, & 0 < r_1 < b \\ b & = & n_1 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 & = & n_2 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ & \vdots & & \\ r_{k-2} & = & n_{k-1} r_{k-1} + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1} \\ r_{k-1} & = & n_k r_k & \end{array}$$

Entonces, el último residuo distinto de cero es el máximo común divisor de a y b, es decir, $r_k = (a,b)$.
Además, $r_k = (a,b) = (b,r_1) = (r_1,r_2) = \cdots = (r_{k-2},r_{k-1}) = (r_{k-1},r_k)$.

Teorema 8 (Congruencias) *Si a y b son enteros y n es un entero positivo, decimos que a es congruente con b módulo n, si n divide a $a-b$, y se denota por $a \equiv b$ (mod n). Para a,b,c enteros y n,m,r enteros positivos, tenemos las siguientes propiedades:*
(1) $a \equiv a$ (mod n).
(2) Si $a \equiv b$ (mod n), entonces $b \equiv a$ (mod n).
(3) Si $a \equiv b$ (mod n) y $b \equiv c$ (mod n), entonces $a \equiv c$ (mod n).
(4) Si $a \equiv b$ (mod n) y $c \equiv d$ (mod n), entonces $a + c \equiv b + d$ (mod n) y $ac \equiv bd$ (mod n).
(5) Si $a \equiv b$ (mod n), entonces $a^m \equiv b^m$ (mod n) para todo entero positivo m.
(6) Si $a = nc + r$ con $0 \leq r < n$, entonces $a \equiv r$ (mod n).

Teorema 9 (Fórmulas útiles) *Si n es un entero positivo, tenemos que:*
(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
(4) $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ para cualquier número real $x \neq 1$.

Teorema 10 (Desigualdad media aritmética - media geométrica) *Para cualesquiera dos números reales no negativos a_1 y a_2, se tiene que:*

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}.$$

La igualdad ocurre si y sólo si $a_1 = a_2$.

Teorema 11 (Principio fundamental del conteo) *Si una tarea puede realizarse de m formas diferentes y, para cada una de estas maneras, una segunda tarea puede realizarse de n maneras distintas, entonces las dos tareas pueden realizarse (en ese orden) de mn formas distintas.*

Definición 12 (Permutaciones y Combinaciones) *Dado un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ con n elementos (distintos), una m-permutación de A, donde $m \leq n$, es una ordenación de m elementos de A. Una m-combinación de A es una selección no ordenada de m elementos de A, es decir, es un subconjunto de A de m elementos.*

Teorema 13 *El número de m-permutaciones de un conjunto de n elementos distintos es:*

$$P(n, m) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

El número de m-combinaciones de un conjunto de n elementos distintos es:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

donde $0! = 1! = 1$ y $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ si $n > 1$.

Teorema 14 (Principio de las casillas) *Si $nk + 1$ objetos (o más) se distribuyen en k casillas, entonces alguna casilla tiene al menos $n + 1$ objetos.*

Definición 15 (Triángulos) *(1) Triángulo acutángulo. Es aquél que tiene sus tres ángulos agudos, es decir, menores de $90°$.*
(2) Triángulo rectángulo. Es aquél que tiene un ángulo recto o de $90°$.
(3) Triángulo obtusángulo. Es aquél que tiene un ángulo obtuso, es decir, un ángulo mayor de $90°$.
(4) Triángulo equilátero. Es aquél que tiene sus tres lados iguales.
(5) Triángulo isósceles. Es aquél que tiene dos lados iguales.
(6) Triángulo escaleno. Es aquel que no tiene dos lados iguales.

Teorema 16 *(1) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$.*
(2) (Desigualdad del triángulo) En un triángulo de lados a, b y c, las siguientes tres desigualdades se cumplen: $a + b \geq c, a + c \geq b, b + c \geq a$, y las igualdades se cumplen si y sólo si los vértices del triángulo son colineales.

Definición 17 (Puntos y rectas notables de un triángulo) *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*
Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro

o baricentro.
Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.
Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices.
Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.
Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas.
Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.
Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.

Definición 18 (Triángulos semejantes) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si se cumple alguna de las siguientes dos condiciones:*
(1) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$.
(2) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

Teorema 19 (Criterios de semejanza) *Dos triángulos son semejantes si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*
(1) Tienen sus lados correspondientes proporcionales.
(2) Tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.
(3) Tienen dos ángulos correspondientes iguales.

Definición 20 (Triángulos congruentes) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si tienen sus tres ángulos iguales y sus tres lados iguales.*

Teorema 21 (Criterios de congruencia) *Dos triángulos son semejantes si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*
(1) (LAL) Tienen dos lados correspondientes iguales y el ángulo comprendido entre ellos igual.
(2) (ALA) Tienen dos ángulos correspondientes iguales y el lado comprendido entre ellos igual.
(3) (LLL) Tienen los tres lados correspondientes iguales.

Teorema 22 (Teorema de Thales) *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre AB y CA respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 23 (Teorema de Pitágoras) *Si ABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto en C, entonces $AB^2 = BC^2 + CA^2$. El recíproco del Teorema de Pitágoras también es cierto, es decir, si en un triángulo ABC se cumple que $AB^2 = BC^2 + CA^2$, entonces el triángulo es rectángulo con ángulo recto en C.*

Teorema 24 (Ley de los cosenos) *En un triángulo ABC, de lados a (opuesto al ángulo A), b (opuesto al ángulo B) y c (opuesto al ángulo C), se tiene que:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Teorema 25 (Ley de los senos) *En un triángulo ABC, de lados a (opuesto al ángulo A), b (opuesto al ángulo B) y c (opuesto al ángulo C), se tiene que:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R,$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. (La circunferencia circunscrita o circuncírculo es la que pasa por los tres vértices del triángulo).

Teorema 26 (Área de un triángulo) *El área de un triángulo ABC, denotada por (ABC), de lados a (opuesto al ángulo A), b (opuesto al ángulo B), c (opuesto al ángulo C), y alturas h_a, h_b, h_c (donde h_i es la altura trazada sobre el lado i) es:*

$$(ABC) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

También:

$$(ABC) = sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4R} = \frac{bc\operatorname{sen} A}{2},$$

donde $s = \frac{a+b+c}{2}$, R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC, y r es el radio de la circunferencia inscrita del triángulo ABC. (La circunferencia inscrita o incírculo es la que tiene como centro al punto de intersección de las bisectrices internas (incentro) y es tangente a los tres lados).

Definición 27 (Colineales) *Puntos colineales son los que se encuentran sobre una misma recta.*

Definición 28 (Ángulos en la circunferencia) *(1) Ángulo inscrito. En una circunferencia, es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
(2) Ángulo semi-inscrito. En una circunferencia, es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.
(3) Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.

Teorema 29 *(1) La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*
(2) La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.
(3) El ángulo entre dos secantes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior, es igual a la mitad de la diferencia de los dos arcos subtendidos.
(4) El ángulo entre dos cuerdas que se cortan en el interior de una circunferencia, es igual a la mitad de la suma de los dos arcos subtendidos.

Definición 30 (Cuadriláteros) *(1) Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Un cuadrilátero $ABCD$ es convexo si al trazar sus diagonales AC y BD, éstas quedan dentro del cuadrilátero. Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si sus vértices están sobre una misma circunferencia.*
(2) Un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. A los lados paralelos del trapecio se les llaman bases. El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos, se llama línea media del trapecio y mide la mitad de la suma de las bases. Si los lados no paralelos del trapecio son iguales, se dice que el trapecio es isósceles.
(3) Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene ambos pares de lados opuestos paralelos.
(4) Un rombo es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales.
(5) Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos.
(6) Un cuadrado es un rectángulo que tiene sus cuatro lados iguales.

Teorema 31 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(1) $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico.
(2) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.
(3) $\angle ADB = \angle ACB$.
(4) $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (Teorema de Ptolomeo).

Concentrado de Respuestas

1.-	(d)	26.-	(c)	51.-	(c)	76.-	(a)
2.-	(a)	27.-	(b)	52.-	(b)	77.-	(d)
3.-	(a)	28.-	(a)	53.-	(a)	78.-	(c)
4.-	(c)	29.-	(b)	54.-	(a)	79.-	(b)
5.-	(e)	30.-	(d)	55.-	(e)	80.-	(c)
6.-	(d)	31.-	(d)	56.-	(d)	81.-	(b)
7.-	(b)	32.-	(c)	57.-	(e)	82.-	(a)
8.-	(e)	33.-	(d)	58.-	(a)	83.-	(b)
9.-	(b)	34.-	(e)	59.-	(b)	84.-	(b)
10.-	(e)	35.-	(c)	60.-	(b)	85.-	(b)
11.-	(a)	36.-	(e)	61.-	(a)	86.-	(a)
12.-	(a)	37.-	(a)	62.-	(e)	87.-	(d)
13.-	(b)	38.-	(a)	63.-	(e)	88.-	(e)
14.-	(d)	39.-	(e)	64.-	(d)	89.-	(d)
15.-	(d)	40.-	(e)	65.-	(c)	90.-	(c)
16.-	(c)	41.-	(c)	66.-	(d)	91.-	(b)
17.-	(c)	42.-	(b)	67.-	(a)	92.-	(e)
18.-	(b)	43.-	(d)	68.-	(c)	93.-	(b)
19.-	(d)	44.-	(b)	69.-	(a)	94.-	(b)
20.-	(d)	45.-	(b)	70.-	(e)	95.-	(a)
21.-	(e)	46.-	(b)	71.-	(b)	96.-	(c)
22.-	(d)	47.-	(e)	72.-	(b)	97.-	(b)
23.-	(b)	48.-	(d)	73.-	(c)	98.-	(a)
24.-	(d)	49.-	(c)	74.-	(e)	99.-	(b)
25.-	(d)	50.-	(d)	75.-	(e)	100.-	(d)

Directorio de delegados estatales

Aguascalientes -*Laura Soledad Casillas Serna*

CECYTEA Plantel Morelos,
Área de Matemáticas y Física de Ingeniería
Chichén-Itzá s/n Cd. Satélite Morelos Rincón 505,
Colonia Guadalupe C.P. 20059, Aguascalientes, Aguascalientes.
Tel. (449) 918 46 67 y Cel. (449) 414 13 85
lscasillass@yahoo.com.mx
www.ommags.com

Baja California -*Carlos Yee Romero*

Universidad Autónoma de Baja California,
Facultad de Ciencias
Km. 103 Carretera de Tijuana-Ensenada,
Unidad Universitaria,
C.P. 22860, Ensenada, Baja California.
Tel. (646) 174 59 25, ext. 116
Fax (646) 174 45 60
cyeer@uabc.mx

Baja California Sur -*Edgar Netzahualcóyotl Soriano Arellano*

Instituto Mar de Cortés
Márquez de León 666, entre Altamirano y Gómez Farías, Col. Centro,
C.P. 23000, La Paz, Baja California Sur.
Tel. y Fax (612) 123 22 02
netza_soriano@hotmail.com
direccion@institutomardecortes.edu.mx

Campeche -*Javier Gan Torres*

Centro Tecnológico del Mar 02, Campeche
Antigua Carretera a Campeche-Hampolol, km 1.0
C.P. 24085, Campeche, Campeche.
Tel. (981) 815 39 78 y Tel. casa (981) 817 08 37
keroto@prodigy.net.mx

Chiapas -*María del Rosario Soler Zapata*

Universidad Autónoma de Chiapas,
Coordinación de las licenciaturas
en Física y Matemáticas,
Calle 4 Oriente 1428, entre la 13^a y 14^a
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.
Tel. (961) 6 18 30 21
msolerza@unach.mx

Chihuahua -*David Cossío Ruiz*

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez,
Instituto de Ingeniería y Tecnología.
Av. del Charro 450 Norte,
C.P. 32310, Cd. Juárez, Chihuahua.
Tel (656) 688 48 87
Fax (656) 688 48 13
sirio11@gmail.com
www.ommch.org

Coahuila -*Silvia del Carmen Morelos Escobar*

Universidad Autónoma de Coahuila,
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Edif. D, Unidad Camporredondo,
C.P. 25000, Saltillo, Coahuila.
Tel. (844) 414 47 39 y (844) 411 82 57
Fax (844) 411 82 57
Tel. casa (844) 431 34 85 y Tel. cel. (844) 437 72 19
smorelos@mate.uadec.mx
smorelos2002@yahoo.com.mx

Colima -*Ing. Martín Eliseo Isaías Ramírez*

Universidad de Colima,
Facultad de Ciencias de la Educación,
Bernal Díaz del Castillo 340,
Col. Villa San Sebastián,
C.P. 28045, Colima, Colima.
Tel. (312) 31 610 00, ext. 47058
http://ommcolima.ucol.mx
ommcol@ucol.mx
martin_isaias@ucol.mx

Distrito Federal -*Luis Alberto Briseño Aguirre*

Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, cubículo 236,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria,
C.P. 04510, México D.F.
Tel. (55) 56 22 48 68
Fax (55) 56 22 48 69
lba@hp.fciencias.unam.mx

Durango -*Armando Mata Romero*

Universidad Juárez del Estado de Durango,
Escuela de Matemáticas,
Av. Veterinaria 210, Col. Valle del Sur,
C.P. 34120, Durango, Durango.
Tel. y Fax (618) 130 11 39
armando@linux.ujed.mx

Guanajuato -*Ignacio Barradas Bribiesca*

Centro de Investigación en Matemáticas, CIMAT,
Callejón Jalisco s/n, Col. La Valenciana,
Apartado Postal 402,
C.P. 36000, Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 732 71 55
Fax (473) 732 57 49
barradas@cimat.mx

Guerrero -*Gonzalo Delgado Espinoza*

Universidad Autónoma de Guerrero,
Facultad de Matemáticas,
Calle Carlos E. Adame 54, Col. Garita,
C.P. 39650, Acapulco, Guerrero.
Tel. y Fax: (744) 487 25 00
Tel. cel. (744) 430 92 54
deg_gonzalo@yahoo.com.mx

Hidalgo -*Anna Tarasenko*

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo,
Edif. Centro de Investigación en Matemáticas, Instituto de Ciencias Básicas,
Carretera Pachuca Tulancingo km. 4.5,
C.P. 42074, Mineral de la Reforma, Hidalgo.
Tel. (771) 717 21 58
Fax (771) 717 21 58
anataras@uaeh.edu.mx

Jalisco -*María Eugenia Guzmán Flores*

Universidad de Guadalajara
Centro Univ. de Ciencias Exactas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas
Av. Revolución 1500, Edificio V, planta baja,
C.P. 44420, Guadalajara, Jalisco.
Tel. y Fax (33) 36 19 95 52
floresguz55@yahoo.com.mx

Estado de México -*Olga Rivera Bobadilla*

Universidad Autónoma del Estado de México,
Facultad de Ciencias,
Instituto Literario No. 100, Col. Centro,
C.P. 50000, Toluca, Estado de México.
Tel. (722) 296 55 56
Fax (722) 296 55 54
orb@uaemex.mx
matematicas_olimpiada@yahoo.com.mx

Michoacán -*Armando Sepúlveda López*

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Departamento de Matemática Educativa,
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Edificio B, Planta Baja, Ciudad Universitaria,
C.P. 58060, Morelia, Michoacán.
Tel. (443) 326 21 46, ext. 130
Fax (443) 322 35 00, ext. 3063
jorge@fismat.umich.mx

Morelos - *Larissa Sbitneva*

Universidad Autónoma del Estado de Morelos,
Facultad de Ciencias,
Av. Universidad 1001, Col. Chamilpa,
C.P. 62209, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 329 70 20
Fax (777) 329 70 40
larissa@buzon.uaem.mx

Nayarit -*Francisco Javier Jara Ulloa*

Grupo Educativo del Valle
Av. de la Cultura 30
Col. Del Valle
C.P 63157, Tepic, Nayarit.
Tel. (311) 2 14 21 45
jaraulloa@gmail.com; jaraulloa@hotmail.com

Nuevo León -*Alfredo Alanís Durán*

Universidad Autónoma de Nuevo León,
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Del Colegio 1077,
Col. Valle de las Flores,
C.P. 66450, San Nicolás, Nuevo León.
Tel. (81) 83 29 40 30, ext. 6130 y (81) 83 13 16 26
Fax (81) 83 52 29 54
aalanis56@hotmail.com

Oaxaca -*Sara Carrillo Uribe*

Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca,
5 de mayo 111, esq. Morelos, Col. Centro,
C.P. 68000, Oaxaca, Oaxaca.
Tel. (951) 514 37 94 y (951) 514 87 50
mushe_wini@hotmail.com

Puebla -*María Araceli Juárez Ramírez*

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
San Claudio y Río Verde, Ciudad Universitaria,
C.P. 72570, Puebla, Puebla.
Tel. (222) 229 55 00 ext. 7578
Fax (222) 229 56 36
arjuarez@fcfm.buap.mx

Querétaro -*Patricia Isabel Spíndola Yáñez*

Universidad Autónoma de Querétaro,
Facultad de Ingeniería,
Cerro de las Campanas s/n,
Centro Universitario,
C.P. 76010, Querétaro, Querétaro.
Tel. (442) 192 12 00, ext. 6015
Fax. (442) 192 12 00, ext. 6005
spindola@uaq.mx

Quintana Roo -*Alicia Ramón Barrios*

Colegio de Bachilleres plantel Cancún 2
Región 236, Manzana 24, Lote 5
C.P. 77500, Cancún, Quintana Roo.
Tel. (998) 174 01 56
Fax (998) 888 72 04 y (998) 884 12 95
olimpiadasquintanaroo@hotmail.com
tita1970@hotmail.com

San Luis Potosí -*Eugenio Daniel Flores Alatorre*

Universidad Autónoma de San Luis Potosí,
Instituto de Física,
Av. Salvador Nava 6, Zona Universitaria,
C.P 78290, San Luis Potosí, San Luis Potosí.
Tel. (444) 826 23 62 al 65,
Fax (444) 813 38 74
floreseugenio@hotmail.com

Sinaloa - *Nicolás Pardo Viera*

Universidad Autónoma de Sinaloa,
Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas,
Ciudad Universitaria,
C.P. 80010, Culiacán, Sinaloa.
Tel. y Fax (667) 716 11 54
pardo@uas.uasnet.mx

Sonora -*José María Bravo Tapia*

Universidad de Sonora,
Departamento de Matemáticas,
Av. Rosales y Boulevard Domínguez s/n, Col. Centro,
C.P. 83000, Hermosillo, Sonora.
Tel. (662) 259 21 55
Fax (662) 259 22 19
jmbravo@gauss.mat.uson.mx

Tabasco -*Antonio Guzmán Martínez*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Unidad Chontalpa.
Km. 1 Carretera Cunduacán, Jalpa de Méndez,
C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco.
Tel. y Fax (914) 336 09 28, (914) 336 03 00
antonio.guzman@dacb.ujat.mx

Tamaulipas -*José Muñoz Delgado*

Universidad Autónoma de Tamaulipas,
Unidad Académica Multidisciplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades,
Academia de Matemáticas,
Centro Universitario Adolfo López Mateos,
C.P. 871490, Cd. Victoria, Tamaulipas.
(834) 318 17 23
Celular 01 (899) 873 96 22
k5sur523@hotmail.com
k5sur523jmd@gmail.com

Tlaxcala - *José Erasmo Pérez Vázquez*

Universidad Autónoma de Tlaxcala,
Departamento de Ingeniería y Tecnología,
Calzada a Apizaquito Km 1.5,
Apartado Postal 140,
C.P. 90300, Apizaco, Tlaxcala.
Tel. (241) 417 25 44,
Fax (241) 417 25 44 y (241) 417 58 44
erasmo@ingenieria.uatx.mx
joserasmo25@gmail.com

Veracruz -*Raquiel Rufino López Martínez*

Universidad Veracruzana, Facultad de Matemáticas,
Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán s/n, Lomas del Estadio,
Zona Universitaria, Col. Centro,
Apartado Postal 270,
C.P. 91090, Xalapa, Veracruz.
Tel. (228) 818 24 53, (228) 842 17 45
Fax (228) 818 24 53
ralopez@uv.mx
raquiel1971@yahoo.com.mx

Yucatán -*Jesús Efrén Pérez Terrazas*

Universidad Autónoma de Yucatán,
Facultad de Matemáticas,
Periférico Norte Tablaje 13615,
Parque industrial, junto al local del FUTV,
C.P. 97110, Mérida, Yucatán.
Tel. (999) 942 31 40 al 49, ext 1076
Fax (999) 942 31 40
jperezt@tunku.uady.mx
ommyuc@tunku.uady.mx

Zacatecas -*Gloria Teresa González de Ávila*

Universidad Autónoma de Zacatecas,
Unidad Académica de Matemáticas,
Camino a la Bufa s/n, intersección con Calzada Solidaridad,
C.P. 98068, Zacatecas, Zacatecas.
Tel. y Fax (492) 922 99 75 ext. 24
ggonzale@mate.reduaz.mx,
www.matematicas.reduaz.mx

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@buzon.uaem.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@servm.fc.uaem.mx

Alejandro Bravo Mojica
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 68
Fax (55) 56 22 48 64
gabriela@hp.fciencias.unam.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

Luis Cruz Romo
UPIITA, IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional 2580
Col. Barrio la Laguna Ticomán
07340, México, D.F.
lucruz@ipn.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Facultad de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 732 01 40
marcant@cimat.mx

Jesús Jerónimo Castro
Universidad Autónoma de Guerrero
Calle Carlos E. Adame 54
Col. La Garita
Acapulco, Guerrero
Tel. (744) 4 87 25 00
jesusjero@hotmail.com

Antonio Olivas Martínez
Magnolias no. 9
Col. Fuentes del Mezquital
83240, Hermosillo, Sonora
Tel. casa (662) 212 53 31
antonio_olivas_mtz@yahoo.com.mx
antoniolivas@correoa.uson.mx

Juan Carlos Piceno Rivera
Priv. Universidad Autónoma de
Tabasco 6740
Col. Universidades
72589,Puebla, Puebla
Tel. (222) 755-70-98
jc_piceno@hotmail.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY
Periferico Norte, Tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-31-40 ext. 1116
carlos.rubio@tunku.uady.mx
jacob.rubio@gmail.com

Elena Ruiz Velázquez
Altair no. 12
Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Pablo Soberón Bravo
Circuito Interior no. 830
Frac. La Herradura
Col. La Herradura
62303, Cuernavaca Morelos
Tel. (777) 134 55 49
bandrak@hotmail.com

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 192 12 64 ext. 121 ó 136
Fax (442) 192 12 646
carsg@uaq.mx

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 329 70 20
Fax (777) 329 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

http://omm.unam.mx/

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Radmila Bulajich Manfrino
(Presidenta)

Anne Alberro Semerena

Alejandro Bravo Mojica

Gabriela Campero Arena

José Antonio Climent Hernández

José Alfredo Cobián Campos

Luis Cruz Romo

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Jesús Jerónimo Castro

Antonio Olivas Martínez

Juan Carlos Piceno Rivera

Carlos Jacob Rubio Barrios

Elena Ruiz Velázquez

Pablo Soberón Bravo

Carmen Sosa Garza

Rogelio Valdez Delgado