Tema 3

El Principio de Inducción

Problema 1

Demuéstrese que para todo $n \in \mathbf{N}$,

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2.$$

Solución

Denotemos por P(n) la propiedad

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Entonces P(1): $1 = 1^2$. Supongamos que P(k) es cierta, es decir,

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) = k^2,$$

veamos entonces que P(k + 1) se satisface

$$P(k + 1): 1 + 2 + 3 + ... + (2(k+1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Como

$$1 + 2 + 3 + ... + (2(k + 1) - 1) = 1 + 2 + 3 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) =$$
$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para cada n.

Problema 2

Demuéstrese que para cada $n \geq 0$, el número $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13.

Solución

Sea P(n) la propiedad: $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13. Claramente P(0) se satisface ya que

$$4^1 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

Supongamos que P(k) es cierta, y veamos que P(k + 1) se satisface. En efecto:

$$4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2} = 4^{(2k+1)+2} + 3^{(k+2)+1} =$$

$$= 4^2 . 4^{2k+1} + 3 . 3^{k+2} = 4^2 (4^{2k+1} + 3^{k+2}) + 3^{k+2} (3 - 16) =$$

$$= 4^2 (13\,t) + 3^{k+2}(-13) = 13\,s,$$

ya que $4^{2k+1} + 3^{k+2}$ es múltiplo de 13.

Entonces, por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para cada n.

Problema 3

Supongamos que $S \subset \mathbf{N}$, $3 \in S$, y que si $(x \in S \Rightarrow x + 3 \in S)$. Pruébese que $\{3n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset S$.

Solución

Sea P(n) la Propiedad: el número $3n \in S$. Claramente P(1) se satisface ya que $3 \in S$. Supongamos que P(k) se satisface o sea $3k \in S$, entonces

$$3k + 3 = 3(k + 1) \in \mathbf{S}.$$

Así P(k + 1) es cierta; luego P(n) se satisface para todo $n \in \mathbf{N}$, y por lo tanto

$$\{3n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset S.$$

Problema 4

Pruébese que para cada $n \in \mathbf{N}$

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solución

Sea P(n) la propiedad

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Como $1^2 = \frac{1.2.3}{6} = 1$, P(1) se satisface. Supongamos que es cierta P(k), entonces

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

luego P(k + 1) se satisface. Así, por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para todo $n \in \mathbf{N}$.

Problema 5

Pruébese que para cada entero $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Solución

Sea P(n) la propiedad

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Como $1^3 = \left[\frac{1.2}{2}\right]^2 = 1$, P(1) se satisface. Supongamos que P(k) es cierta, entonces

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2,$$

luego P(k +1) se satisface. Así, por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para todo $n \geq 1$.

Problema 6

Pruébese que para cada entero $n \geq 0$, el número $n^4 - 4n^2$ es divisible por 3.

Solución

Sean P(n) la propiedad: el número $n^4 - 4n^2$ es divisible por 3; entonces como 0 es divisible por 3 se tiene que P(0) se satisface.

Supongamos que P(k) se satisface, entonces

$$(k+1)^4 - 4(k+1)^2 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - 4(k^2 + 2k + 1) =$$

$$= (k^4 - 4k^2) + (4k^3 + 6k^2 - 4k - 3) = (k^4 - 4k^2) + 3(2k^2 - 1) + 4k(k^2 - 1).$$

El primer término es divisible por 3 porque se satisface P(k); el segundo termino claramente es divisible por 3. Luego lo único que tenemos que demostrar es que $k(k^2 - 1)$ es divisible por 3.

Sabemos que $3 \mid [k^4 - 4k^2 = k^2(k^2 - 4)]$, luego $3 \mid k^2$ ó $3 \mid (k^2 - 4)$; así $3 \mid k$ ó $3 \mid (k + 2)$ ó $3 \mid (k - 2)$, o lo que es equivalente, $3 \mid k$ ó $3 \mid (k - 1)$ ó $3 \mid (k + 1)$; en cualquiera de los tres casos 3 divide a $k(k^2 - 1) = k(k - 1)(k + 1)$.

Así P(k + 1) es cierta, y por lo tanto, aplicando el Principio de Inducción, P(n) se satisface para todo $n \geq 0$.

Problema 7

Pruébese que para cada entero $n \geq 2$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} = 1 - \frac{1}{n}\ .$$

Solución

Sea P(n) la Propiedad la igualdad

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} = 1 - \frac{1}{n}\ .$$

Entonces P(2) es cierta, ya que $\frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$

Supongamos que se satisface P(k), entonces

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)\,k} + \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k\,(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}\,,$$

luego P(k + 1) es cierta, y así, por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para todo $n \geq 2$.

Problema 8

Pruébese que para cada $n \geq 10$, $2^n > n^3$.

Solución

Sea $S = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 10 \text{ y } 2^n > n^3\}$. Claramente $10 \in S$ ya que

$$2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000.$$

Supongamos que $k \in S$, entonces

$$2^{k+1} = 2 .\, 2^k > 2k^3.$$

Luego para demostrar que $k + 1 \in S$ solo tendremos que probar que

$$2k^3 > (k+1)^3,$$

o lo que es lo mismo

$$2k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \text{ ó } k^3 - 3k^2 - 3k > 1 \text{ ó } k(k^2 - 3k - 3) > 1;$$

como $k \geq 10$, es sufiente demostrar

$$k^2 - 3k - 3 > 1 \quad \text{y así} \quad k^2 > 3(k-1),$$

y esto es cierto puesto que $k \geq 10$.

Entonces por el Principio de Inducción

$$S = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 10\}.$$

Problema 9

Usando la Inducción Matemática pruébese que

a) $2n + 1 < n^2$ para todo $n \geq 3$.

b) $n^2 < 2^n$ para todo $n \geq 5$.

Solución

a) Sea $S = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3 \ \text{ y } \ 2n+1 < n^2\}$; entones $3 \in S$ ya que $2.3 + 1 < 3^2$. Supongamos que $k \in S$, luego

$$2(k+1)+1 = 2k+1+2 < k^2+2,$$

y para probar que $k+1 \in S$ sólo se necesita demostrar que

$$k^2+2 < (k+1)^2 \ \text{ ó } \ k^2+2 < k^2+2k+1 \ \text{ ó } \ 1 < 2k,$$

que es claramente cierto puesto que $k \geq 3$; luego por el Principio de Inducción se tiene $S = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3\}$.

b) Sea $T = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 5 \ \text{ y } \ n^2 < 2^n\}$, entonces $5 \in T$ puesto que $25 < 2^5$. Supongamos que $k \in S$, luego

$$2^{k+1} = 2^k.2 > k^2.2,$$

y para probar que $k+1 \in T$ solo habrá que demostrar que

$$2k^2 > (k+1)^2 \ \text{ ó } \ 2k^2 > k^2+2k+1 \ \text{ ó } \ k^2 > 2k+1,$$

que es cierto por el apartado a). Así por el Principio de Inducción,

$$T = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 5\}.$$

Problema 10

Pruébese que para cada entero positivo n

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Solución

Sea P(n) la propiedad: la desigualdad

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n},$$

es cierta.

Entonces como $1 \leq 1 = 2 - 1$, P(1) se satisface. Supongamos que P(k) se satisface y que P(k+1) no se satisface

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}>2-\frac{1}{k+1},$$

luego se tendría

$$(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2})-(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2})>$$

$$(2-\frac{1}{k+1})-(2-\frac{1}{k}),$$

por lo tanto

$$\frac{1}{(k+1)^2}>\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},$$

así $k > (k+1)^2 - k(k+1) = (k+1)$, lo que es una contradicción , luego P(k + 1) es cierta, así, por el Principio de Inducción, P(n) se satisface para todo n.

Problema 11

Para cada $n \in \mathbf{N}$, sean $P_1(n)$ la afirmación $n^2 + n + 11$ es primo, y $P_2(n)$ la afirmación $3 \mid (3n + 2)$.

a) Notemos que $P_1(1)$, $P_1(2)$,..., $P_1(9)$ son todos verdaderos. ¿Es $P_1(n)$ verdadero para cada n?.

b) Notemos que la implicación $P_2(k) \Rightarrow P_2(k+1)$ es verdadera para cada $k \in \mathbf{N}$. ¿Puede considerarse que $P_2(n)$ es verdadero para cada $n \in \mathbf{N}$?.

Solución

a) No es cierto, porque $P_1(10)$ sería "$10^2 + 10 + 11 = 121$ es un número primo", lo cual es falso, puesto que $121 = 11^2$.

b) No, porque en este caso $P_2(1)$ no se satisface ya que 3 no divide a $3.1 + 2 = 5$.

Problema 12

Sea a un número entero positivo. Vamos a demostrar usando el Principio Fuerte de Inducción que $a^{n-1} = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Si $n = 1$, $a^{1-1} = a^0 = 1$. Supongamos que el resultado es cierto para k, $1 \leq k < n$. Entonces

$$a^{n-1} = \frac{a^{n-2}a^{n-2}}{a^{n-3}} = \frac{1.1}{1} = 1,$$

así por el Principio Fuerte de Inducción $a^{n-1} = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$. ¿Donde falla este argumento?.

Solución

Para que fuese cierto tendría que darse que $n - 2$ y $n - 3$ fueran números entre 0 y $n - 2$, pero si $n - 1 = 1$ se tiene que $n - 3$ sería -1 y -1 no está entre 0 y $n - 2$; luego no se puede aplicar la fórmula del enunciado.

Problema 13

Definimos la sucesión de números $t_1, t_2, t_3,...$ mediante

i) $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$.

ii) $t_n = t_{n-3} + t_{n-2} + t_{n-1}$ para cada $n \geq 4$.

Usando la Inducción Matemática pruébese que $t_n < 2^n$ para cada $n \in \mathbf{N}$.

Solución

Sea $S = \{ n \in \mathbf{N} \mid t_n < 2^n\}$. Entonces 1, 2 y 3 $\in S$ puesto que $t_1 = 1 < 2^1 = 2$, $t_2 = 2 < 2^2 = 4$, $t_3 = 3 < 2^3 = 8$. Supongamos que $n \geq 4$, y que $k \in S$ para todo

$1 \leq k < n$; entonces

$$t_n = t_{n-3} + t_{n-2} + t_{n-1},$$

y por tanto

$$t_n < 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^{n-3}(1 + 2 + 2^2) = 7 \,.\, 2^{n-3} < 8 \,.\, 2^{n-3} = 2^n.$$

Así, por el Principio Fuerte de Inducción, $S = \mathbf{N}$.