Inducción Matemática

Los problemas siguientes necesariamente deben ser probados usando inducción matemática. Los problemas no están ordenados por dificultad.

1. Prueba que $3^n \geq 2^n$.

2. Prueba que para cualquier $n \geq 2$
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1$$

3. Prueba que para cualquier $n > 0$:
$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 10^2 + \cdots + (3n-2)^2 = \frac{n\left(6n^2 - 3n - 1\right)}{2}$$

4. Prueba por inducción la fórmula para la suma de una serie geométrica:
$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$$

5. *Teorema de Nicómaco*[1]
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

6. Muestra que para cualquier $n \geq 2$
$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}} < 3$$

7. Muestra que 3^{n+1} divide a $2^{3^n} + 1$ para toda $n \geq 0$.

8. Definimos a los números de Fibonacci F_n como sigue:
$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned}$$
para $n > 1$. Muestra que si $a = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ y $b = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$, entonces:
$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

9. Muestra que si F_n está definido como en el problema 12 y $n > 0$, entonces F_n y F_{n+1} son primos relativos.

10. Muestra que si $\sin x \neq 0$ y n es un natural, entonces:
$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1}x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$$

[1] Intente resolver éste problema de manera geométrica.

11. Suponga que hay n carros idénticos en una pista circular y entre ellos hay suficiente gasolina para que un carro haga un recorrido completo alrededor de la pista. Muestre que hay un carro que puede dar una vuelta alrededor de la pista si recolecta toda la gasolina de cada carro que pase mientras se mueve (los demás carros están estáticos).

12. Muestre por inducción que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n$$

13. Prueba que para cualquier número natural n,
$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

14. Prueba que para cualquier número natural $n \geq 2$,
$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{2}{n^2}$$

15. *Desigualdad de Bernoulli*

    Si $x \geq -1$ entonces $(1+x)^n \geq 1+nx$ para todos los números naturales n.

16. Pruebe por inducción que 2304 divide a $7^{2n} - 48n - 1$ para cualquier número natural n.

17. Sea $4m+1$ un número primo. Prueba que para todos los enteros $n \geq 0$,
$$\sum_{i=1}^{2m} i^{4n+2}$$
    es divisible por $4m+1$.

    Hint: Usa el teorema de Wilson para ver que existe un entero a que cumple $a^2 \equiv -1 \pmod{4k+1}$. Después de eso y agrupar términos convenientemente, tendrás que usar una propiedad muy conocida del álgebra.

Inducción Matemática en Geometría

18. Prueba que si n líneas se dibujan en un plano de manera que no hay entre ellas paralelas, y no hay tres líneas que se corten en un mismo punto, entonces el plano es dividido por esas líneas en $\frac{n^2+n+2}{2}$ regiones.

19. Prueba que si las mismas líneas del problema 4 son dibujadas en un plano, entonces es posible colorear las regiones formadas con solamente dos colores de manera que no haya dos regiones adyacentes que compartan el mismo color.

20. Suponga que cualquier n-ágono simple (pero no necesariamente convexo) con $n > 3$, tiene al menos una diagonal que se encuentra completamente contenida en el n-ágono. Prueba que cualquier n-ágono puede ser dividido en $n-2$ triángulos exactamente de manera que cada vértice de dichos triángulos es uno de los vértices del n-ágono original.

21. Suponga que uno empieza con una barra de chocolate que consiste de $n \times k$ cuadros. En cada paso, uno puede elegir una pieza de chocolate que tenga mas de dos cuadros y cortarla a lo largo de cualquier línea, vertical u horizontal. Eventualmente, se reducirá a cuadros solos. Muestra por inducción que el número de cortes necesarios para reducir la barra a cuadros sencillos es $nk-1$.

22. Prueba que un cuadrado puede ser cortado en cualquier cantidad n de cuadrados más chicos, $n > 5$ (sin sobrantes).

23. n circunferencias dividen al plano en varias regiones. Encuentra el número de regiones, si cualesquiera dos circunferencias se intersecan en dos puntos y no hay tres circunferencias que pasen por el mismo punto.

24. A una cuadrícula de tamaño $2^{13} \times 2^{13}$, se le quita un cuadrado unitario. Prueba que uno puede llenar los cuadros restantes de *triominós* en forma de L.

25. Varias líneas parten el plano en varias regiones. Cada línea tiene una sombra en uno de sus lados. Prueba que hay una región completamente cubierta por cada una de las sombras.

Inducción Matemática en Combinatoria

26. Suponga que S es un conjunto con n elementos. Prueba que el conjunto formado por todos los subconjuntos de S tiene 2^n elementos.

27. En la primer celda de una tira de cuadrados se sienta un saltamontes. Cada minuto el saltamontes salta a la derecha a la celda adyacente, o a se salta la adyacente y llega a una celda después de la adyacente. Encuentra el número de maneras para llegar a la n-ésima celda.

28. Establece y prueba el mínimo número de operaciones necesarias para resolver el problema de *"Las Torres de Hanoi"*.

29. Cada una de n jarras idénticas está llena de pintura hasta $\frac{n-1}{n}$ de su volumen. No hay dos jarras que contengan el mismo tipo de pintura. Está permitido vaciar cualquier cantidad de pintura de una jarra a otra. ¿Podría uno obtener la misma mezcla en todas las jarras? (No se puede desperdiciar pintura y no hay más jarras disponibles).

30. Una banda de n piratas divide una pila de tesoros entre ellos. Cada uno quiere estar seguro de recibir no menos que $1/n$ de la pila. Encuentra una manera justa de repartir el tesoro entre ellos (de manera que nadie pueda culpar a otra persona, excepto quizás a sí mismo). La opinión de los piratas en el tamaño de las pilas podría ser diferente.

31. Hay 1000 cazuelas cada una conteniendo algunas cantidades de jamón, no más de 1/100 del total. Cada día, exactamente 100 cazuelas son elegidas, y de cada una de ellas, la misma cantidad de jamón es comida. Prueba que es posible comerse todo el jamón en una cantidad finita de días.